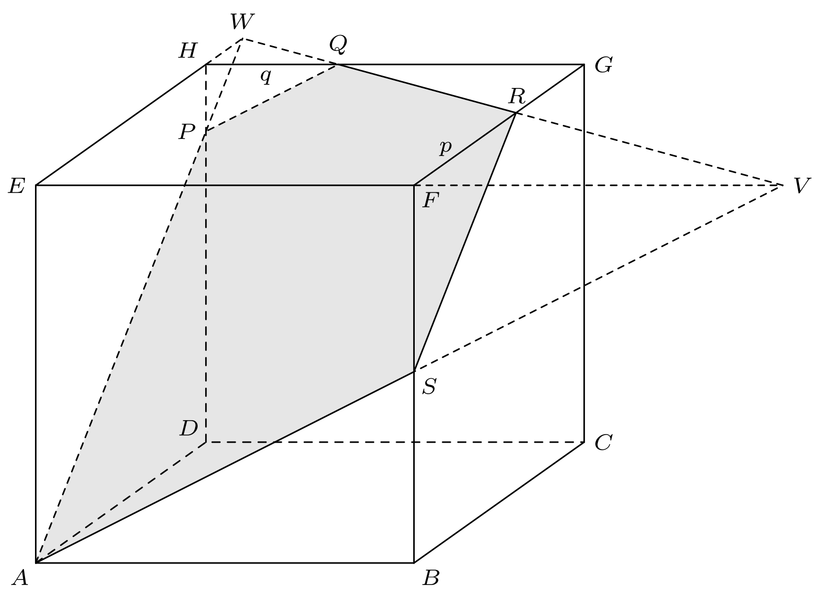
Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

MATURA Z MATEMATYKI

Materiały pomocnicze dla nauczycieli i uczniów
opracowane
przez
Centralny Zespół
Ekspertów Matematycznych
w latach 2010-2014



Matura z matematyki

Matura z matematyki

Materiały pomocnicze dla nauczycieli i uczniów

opracowane przez

Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych

Centralna Komisja Egzaminacyjna

Warszawa 2014

Publikacja współfinansowana ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Publikacja jest rozprowadzana bezpłatnie.

Publikacja opracowana przez Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych
działający w ramach projektu: „Pilotaż nowych egzaminów maturalnych"
realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną
pod kierunkiem Agnieszki Sułowskiej:

Henryk Dąbrowski
Elżbieta Dittmajer
Mieczysław Fałat
Wojciech Guzicki
Halina Kałek
Piotr Ludwikowski
Edyta Marczewska
Anna Olechnowicz
Marian Pacholak
Maria Pająk-Majewska
Waldemar Rożek
Elżbieta Sepko-Guzicka
Agata Siwik
Leszek Sochański
Edward Stachowski

Skład:
Jakub Pochrybniak

Wydawca:
Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2014

ISBN 978-83-940902-0-3

Spis treści

Dodatek — zestawy zadań

Słowo wstępne

Rok 2015 staje się rokiem przełomowym dla maturzystów i ich nauczycieli, ponieważ egzamin maturalny istotnie się zmienia. Modyfikacja stała się konieczna, gdyż nastąpiły zmiany w podstawie programowej nauczania matematyki. Właśnie w 2015 roku do egzaminu maturalnego przystąpią po raz pierwszy ci absolwenci szkół ponadgimnazjalnych, którzy przygotowywali się do tego egzaminu w oparciu o nową podstawę programową. Wybór przedmiotów realizowanych na poziomie rozszerzonym na początku drugiej klasy w istotny sposób wpływa na wybory egzaminacyjne. Na te wybory wpływa również zmiana w formule egzaminu maturalnego — zdający obowiązkowo przystępuje do jednego egzaminu na poziomie rozszerzonym. Bardzo dobre recenzje ewolucji, która dokonała się w strukturze arkusza egzaminacyjnego na poziomie podstawowym, wskazały kierunek, który powinno się uwzględnić w konstrukcji arkusza na poziomie rozszerzonym.

W *Komentarzu do podstawy programowej przedmiotu matematyka* autorzy — Zbigniew Semadeni, Marcin Karpiński, Krystyna Sawicka, Marta Jucewicz, Anna Dubiecka, Wojciech Guzicki, Edward Tutaj napisali:

> „O tym, jaka będzie wykładnia podstawy programowej, zadecyduje praktyka nauczania i **praktyka egzaminów maturalnych**. Po kilku latach funkcjonowania nowej podstawy programowej, w wyniku współdziałania szkoły, komisji egzaminacyjnych i uczelni wyższych, **ustali się pewien poziom interpretowania i realizowania obowiązujących wymagań**."

Aby zrealizować ten zapis, w 2011 roku, przed Centralnym Zespołem Ekspertów Matematycznych postawiono nowe zadania. Wśród tych zadań, między innymi, było zaproponowanie zmian w strukturze egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym i przedstawienie poziomu interpretowania i realizowania wymagań zapisanych w podstawie programowej. Przez prawie trzy lata Zespół opracowywał propozycję zmian. Testowane były różne koncepcje struktury egzaminu i różne rodzaje zadań. W wyniku analiz opracowań wyników testowania i wielogodzinnych dyskusji zaproponowano koncepcję egzaminu, która znalazła odzwierciedlenie w „Informatorze o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015".

Równolegle z kształtowaniem się struktury egzaminu, środowisko nauczycieli matematyki na bieżąco było informowane o efektach pracy Zespołu, w trakcie cyklicznie organizowanych konferencji dla doradców metodycznych i konsultantów. Podczas pracy nad formułą egzaminu powstawały również materiały dydaktyczne pomocne w interpretacji oraz realizacji nowej podstawy programowej. Dobre przyjęcie przez uczestników treści wykładów i materiałów konferencyjnych zachęciło nas do opublikowania ich w zwartej publikacji.

Kolejne roczniki maturzystów, w tym absolwentów techników, będą zdawały egzamin maturalny w nowej formule. Publikacja, którą Państwu proponujemy, dotyczy głównie tych treści, które w istotny sposób ilustrują zmiany. Jeżeli choćby część z tych materiałów pomoże Państwu lepiej przygotować swoich uczniów do egzaminu maturalnego, będzie to najlepszą nagrodą dla autorów tekstów.

Dziękujemy panu profesorowi Zbigniewowi Marciniakowi za cenne uwagi przy redagowaniu tej książki, jak również za wsparcie podczas siedmioletniej pracy zespołu. Pani Agnieszce Sułowskiej, pani Mirce Cyganiak i panu Jackowi Goźlińskiemu dziękujemy za wszelką pomoc w ciągu tych siedmiu lat.

Autorzy

Rozdział 1

O trzech elementarnych nierównościach i ich zastosowaniach przy dowodzeniu innych nierówności

Edward Stachowski

Przy dowodzeniu nierówności stosujemy elementarne **przejścia równoważne**, przeprowadzamy rozumowanie typu:

jeżeli $a > 0$ oraz $b > 0$, to:

i) $a \geqslant b$ jest równoważne $a^2 \geqslant b^2$,
ii) $a \geqslant b$ jest równoważne $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$,

albo stosujemy **przejścia, które nie są równoważne**.

Korzystamy wtedy

- z relacji przechodniości:
$$\text{jeżeli } a \geqslant b \quad \text{oraz } b \geqslant c, \quad \text{to } a \geqslant c,$$

albo

- z możliwości dodawania stronami zgodnie skierowanych nierówności:
$$\text{jeżeli } a \geqslant b \quad \text{oraz } c \geqslant d, \quad \text{to } a+b \geqslant c+d,$$

albo

- z możliwości mnożenia stronami zgodnie skierowanych nierówności dla liczb dodatnich:
$$\text{jeżeli } a \geqslant b \geqslant 0 \quad \text{oraz } c \geqslant d \geqslant 0, \quad \text{to } a \cdot c \geqslant b \cdot d,$$
gdyż $ac - bd = a(c-d) + (a-b)d \geqslant 0$.

Zapowiadane w tytule trzy elementarne nierówności są następujące (z podanej numeracji będziemy korzystali w przedstawianych rozwiązaniach przykładowych zadań):

1. Dla każdych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność
$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Dowód
Przekształcamy nierówność równoważnie:
$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0,$$
$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$
Ostatnia nierówność jest oczywista.

2. Nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej.
   Średnią geometryczną dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych a, b nazywamy liczbę $\sqrt{ab}$.
   Dla każdych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność
   $$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$
   którą często zapisujemy w postaci
   $$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
   przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

   Dowód
   Przekształcamy nierówność równoważnie:
   $$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geqslant \sqrt{ab}, \\ a+b &\geqslant 2\sqrt{ab}, \\ a-2\sqrt{ab}+b &\geqslant 0, \\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$
   Ostatnia nierówność jest oczywista.
3. Dla każdych liczb rzeczywistych a, b, takich, że $ab>0$, prawdziwa jest nierówność
   $$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2,$$
   przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.
   Jeżeli $ab<0$, to
   $$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leqslant -2.$$
   Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-b$.

   Dowód
   a) Ponieważ $ab>0$, to mnożąc obie strony nierówności przez ab otrzymujemy nierówność $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, równoważną z oczywistą nierównością $(a-b)^2 \geqslant 0$.
   Równość ma miejsce, gdy $a=b$.
   b) Ponieważ $ab<0$, to mnożąc obie strony nierówności przez ab otrzymujemy nierówność $a^2+b^2 \geqslant -2ab$, równoważną z oczywistą nierównością $(a+b)^2 \geqslant 0$.
   Równość ma miejsce, gdy $a=-b$.

1.1. Zastosowania pierwszej nierówności

1.1.1. Zadania wprowadzające

Zadanie 1.

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2+1 \geqslant 2x$.

Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned} x^2+1 &\geqslant 2x, \\ x^2-2x+1 &\geqslant 0, \\ (x-1)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista.

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$.

Zadanie 2.

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2+1 \geqslant 2|x|$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że $|x|^2=x^2$ i przekształcamy nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned} x^2+1 &\geqslant 2|x|, \\ x^2-2|x|+1 &\geqslant 0, \\ (|x|-1)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista.

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|x|=1$, czyli dla $x=1$ albo $x=-1$.

1.1.2. Nierówność 1.

Dla każdych liczb rzeczywistych a oraz b prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab. \tag{1}$$

1.1.3. Przykłady zastosowań

Przykład 1.

Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych x oraz a prawdziwa jest nierówność $(x+a)^2 \geqslant 4ax$.

Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &\geqslant 4ax,\\ x^2+2ax+a^2 &\geqslant 4ax,\\ x^2-2ax+a^2 &\geqslant 0,\\ (x-a)^2 &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista.

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x=a$.

Przykład 2.

Wykaż, że jeżeli a, b są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego oraz c jest długością przeciwprostokątnej tego trójkąta, to $a+b \leqslant c\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Jest wiele dowodów geometrycznych tej nierówności, my przedstawimy dowód algebraiczny, ale oczywiście nie obejdzie się bez zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Pokażemy, że $(a+b)^2 \leqslant 2c^2$, co jest równoważne z tezą.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leqslant a^2+\left(a^2+b^2\right)+b^2 = 2\left(a^2+b^2\right) = 2c^2.$$

Równość ma miejsce, gdy trójkąt jest równoramienny, czyli jest „połową kwadratu”.

Uwaga

Zauważmy, że „przy okazji” udowodniliśmy nierówność o związku między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową.

Średnia kwadratowa liczb a, b jest równa $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Wykazaliśmy, że dla dowolnych liczb a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

i gdy $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, to równość zachodzi dla $a=b$.

Przykład 3.

Wykaż, że jeżeli w prostopadłościanie a, b, c są długościami krawędzi wychodzącymi z jednego wierzchołka oraz d jest długością przekątnej tego prostopadłościanu, to $a+b+c \leqslant d\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Jest wiele dowodów geometrycznych tej nierówności, my przedstawimy dowód algebraiczny, korzystając z wzoru na długość przekątnej prostopadłościanu: $a^2+b^2+c^2=d^2$.

Pokażemy, że $(a+b+c)^2 \leqslant 3d^2$, co jest równoważne z tezą.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \leqslant \\ &\leqslant a^2+b^2+c^2+\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right) = \\ &= 3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 3d^2.\end{aligned}$$

Równość ma miejsce dla $a=b=c$, czyli gdy prostopadłościan jest sześcianem.

Uwaga

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

średnia kwadratowa liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ to

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

Rozumując tak, jak w przykładach 2. oraz 3., możemy udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tzn. wykazać, że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

Przykład 4.

Wykaż, że jeżeli $x+y=a$, to $x^2+y^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$.

W szczególności, gdy $x+y=1$, to $x^2+y^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Podnosimy obie strony równości $x+y=a$ do kwadratu i korzystamy z nierówności (1).

$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \leqslant x^2+\left(x^2+y^2\right)+y^2=2\left(x^2+y^2\right)$, stąd po podzieleniu obu stron nierówności przez 2 otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=\frac{a}{2}$.

Przykład 5.

Wykaż, że jeżeli $x+y+z=a$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{a^2}{3}$.

W szczególności $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Podnosimy obie strony równości $x+y+z=a$ do kwadratu i korzystamy z nierówności (1).

$$\begin{aligned} a^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \leqslant \\ \leqslant x^2+y^2+z^2+\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right) = 3\left(x^2+y^2+z^2\right). \end{aligned}$$

Stąd po podzieleniu obu stron nierówności przez 3 otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z=\frac{a}{3}$.

Uwaga

Rozumując analogicznie jak w przykładach 3. oraz 4. można wykazać, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots x_n$ są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, to $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geqslant \frac{a^2}{n}$.

Równość ma miejsce, gdy $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{a}{n}$.

Przykład 6.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz.$$

Rozwiązanie

Zapisujemy trzy razy nierówność 1.

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy,$$

$$x^2+z^2 \geqslant 2xz,$$

$$y^2+z^2 \geqslant 2yz,$$

po dodaniu stronami otrzymujemy $2\left(x^2+y^2+z^2\right) \geqslant 2(xy+xz+yz)$, a po podzieleniu obu stron przez 2 otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Uwaga

Rozumując analogicznie jak w przykładzie 5. możemy wykazać, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots x_n$ są liczbami rzeczywistymi, to

$$(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i \cdot x_j,$$

i równość ma miejsce, gdy $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

1.2. Zastosowania drugiej nierówności

1.2.1. Zadanie wprowadzające

Zadanie 3.

Wykaż, że jeżeli $x \geqslant 0$, to $x+1 \geqslant 2\sqrt{x}$.

Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$\begin{aligned} x+1 &\geqslant 2\sqrt{x}, \\ x-2\sqrt{x}+1 &\geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1 &\geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest oczywista.

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$.

1.2.2. Nierówność 2.

Da każdych liczb nieujemnych rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \tag{2}$$

którą często zapisujemy w postaci $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Uwaga

Nierówność ta zasługuje na szczególną uwagę.

Z faktu, że dla każdych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ wynika, że:

a) jeżeli stała jest sumą dwóch liczb dodatnich, to ich iloczyn jest największy, gdy obie liczby są równe (np. wśród prostokątów o ustalonym obwodzie największe pole ma kwadrat),
b) jeżeli stały jest iloczyn dwóch liczb dodatnich, to ich suma jest najmniejsza, gdy obie liczby są równe (np. wśród prostokątów o ustalonym polu najmniejszy obwód ma kwadrat).

1.2.3. Przykłady zastosowań

Przykład 1.

Wykaż, że jeżeli $x > 0$, $y > 0$ oraz $xy = 25$, to $(1+x)(1+y) \geqslant 36$.

Rozwiązanie

$$(1+x)(1+y) = 1+xy+x+y = 26+(x+y) \geqslant 26+2\sqrt{25} = 36.$$

Równość ma miejsce, gdy $x = y = 5$.

Przykład 2.

Wykaż, że jeżeli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $ab = 4$, to $(a+x)(b+x) \geqslant (x+2)^2$.

Rozwiązanie

$(a+x)(b+x) = x^2+ab+ax+bx = x^2+4+(a+b)x \geqslant x^2+4+2\sqrt{4}\cdot x = x^2+4x+4 = (x+2)^2$.

Równość ma miejsce, gdy $a = b = 2$.

Przykład 3.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz = 1$, to

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geqslant 8.$$

Rozwiązanie

Zapisujemy trzy razy nierówność dla średnich:

$$\begin{aligned} 1+x &\geqslant 2\sqrt{x}, \\ 1+y &\geqslant 2\sqrt{y}, \\ 1+z &\geqslant 2\sqrt{z}. \end{aligned}$$

Mnożąc te trzy nierówności stronami otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x = y = z = 1$.

Przykład 4.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$(x+y)(x+z)(y+z) \geqslant 8xyz.$$

Rozwiązanie

Zapisujemy trzy razy nierówność dla średnich:

$$\begin{aligned} x+y &\geqslant 2\sqrt{xy}, \\ y+z &\geqslant 2\sqrt{yz}, \\ x+z &\geqslant 2\sqrt{xz}. \end{aligned}$$

Mnożąc te trzy nierówności stronami otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x = y = z$.

Przykład 5.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$xy + yz + zx \geqslant x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

Rozwiązanie

Dla uproszczenia dowodu pomnożymy obie strony tezy przez 2, przekształcimy lewą stronę otrzymanej nierówności i trzy razy zastosujemy nierówność (2).

$$\begin{aligned}2(xy + yz + zx) &= xy + xz + yx + yz + zx + zy = x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) \geqslant \\ &\geqslant x \cdot 2\sqrt{yz} + y \cdot 2\sqrt{xz} + z \cdot 2\sqrt{xy} = 2\left(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}\right).\end{aligned}$$

Równość ma miejsce, gdy $x = y = z$.

Przykład 6.

Wykaż, że jeżeli a, b, c, d są liczbami dodatnimi, to

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geqslant 2\sqrt[4]{abcd}.$$

Rozwiązanie

Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymamy nierówność równoważną

$$(a+b)(c+d) \geqslant 4\sqrt{abcd}.$$

Zapisujemy teraz dwa razy nierówność (2):

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

$$c + d \geqslant 2\sqrt{cd}.$$

Po pomnożeniu tych nierówności stronami otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $a = b$ oraz $c = d$.

Przykład 7.

Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi oraz $x + y = 16$, to

$$(1+x)(1+y) \leqslant 81.$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności 2. mamy

$$xy = (\sqrt{xy})^2 \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 64.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy

$$(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy \leqslant 1+16+64 = 81,$$

co należało wykazać.

1.3. Zastosowania trzeciej nierówności

1.3.1. Zadania wprowadzające

Zadanie 4.

Wykaż, że jeżeli $x > 0$, to $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Rozwiązanie

Ponieważ $x > 0$, to po pomnożeniu obu stron nierówności przez x otrzymujemy nierówność $x^2 + 1 \geqslant 2x$, równoważną z oczywistą nierównością $(x-1)^2 \geqslant 0$. Równość ma miejsce, gdy $x = 1$.

Zadanie 5.

Wykaż, że jeżeli $x < 0$, to $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$.

Rozwiązanie

Ponieważ $x < 0$, to po pomnożeniu obu stron nierówności przez x otrzymujemy nierówność $x^2 + 1 \geqslant -2x$, równoważną z oczywistą nierównością $(x+1)^2 \geqslant 0$. Równość ma miejsce, gdy $x = -1$.

1.3.2. Nierówność 3.

a) Jeżeli $ab > 0$, to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2. \tag{3a}$$

b) Jeżeli $ab < 0$, to

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leqslant -2. \tag{3b}$$

1.3.3. Przykłady zastosowań

Przykład 1.

Z nierówności (3a) wynika natychmiast, że jeżeli α jest kątem ostrym, to

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geqslant 2,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko gdy $\alpha = 45°$.

Przykład 2.

Wykaż, że jeżeli $xy > 0$, to $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geqslant 4$.

Rozwiązanie

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = 1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1 = 2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Stosujemy teraz nierówność (3):

$$2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \geqslant 2+2 = 4.$$

Równość ma miejsce, gdy $x = y$.

Przykład 3.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9$.

Rozwiązanie

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) &= 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1 = \\ &= 3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right).\end{aligned}$$

Stosujemy teraz do każdego z trzech nawiasów nierówność (3)

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) \geqslant 3+2+2+2 = 9$$

i otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x = y = z$.

Przykład 4.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y) \geqslant 0.$$

Rozwiązanie

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y)= \\
&\quad =xyz\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}-2+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-2+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-2\right)= \\
&\quad =xyz\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)\right).
\end{aligned}$$

Stosując do każdego z trzech nawiasów nierówność (3) w wersji $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geqslant 0$, otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 5.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\geqslant x+y+z.$$

Rozwiązanie

Dla uproszczenia dowodu pomnożymy obie strony tezy przez 2, przekształcimy lewą stronę otrzymanej nierówności i zastosujemy do każdego z trzech nawiasów nierówność (3).

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right)&=\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}= \\
&=x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+z\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant 2x+2y+2z=2(x+y+z).
\end{aligned}$$

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 6.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz=1$, to

$$xy+xz+yz+x+y+z\geqslant 6.$$

Rozwiązanie

Z warunku $xyz=1$ wyznaczymy $z=\frac{1}{xy}$ otrzymując: $xz=x\cdot\frac{1}{xy}=\frac{1}{y}$, $yz=y\cdot\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}$.

Zapisujemy nierówność w postaci

$$xy+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+x+y+\frac{1}{xy}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(xy+\frac{1}{xy}\right).$$

Stosując do każdego z nawiasów nierówność (3) otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z=1$.

Rozdział 2

Zadania na dowodzenie Geometria, cz. I

Wojciech Guzicki

W arkuszach maturalnych matury próbnej (listopad 2009 r.) i matury podstawowej (maj 2010 r.) znalazły się zadania geometryczne na dowodzenie. Za poprawne rozwiązanie takiego zadania zdający mógł otrzymać 2 punkty — były to tzw. „zadania krótkiej odpowiedzi". Przy wystawianiu oceny za rozwiązanie zadania na dowodzenie kierowano się zasadą, że dowód matematyczny powinien być kompletny i tylko w wyjątkowych sytuacjach można uznać, że zdający „pokonał zasadnicze trudności zadania", nie doprowadzając przy tym rozwiązania do końca.

W tym opracowaniu pokazuję 21 zadań geometrycznych na dowodzenie o podobnym stopniu trudności jak zadania ze wspomnianych wyżej arkuszy. Przyjmuję, że za poprawne rozwiązanie każdego z tych zadań przyznaje się 2 p. Natomiast kwestia, za jakie rozwiązanie częściowe można przyznać 1 p., jest w każdym przypadku sprawą dyskusyjną.

Pokazuję trzy typy zadań na dowodzenie. Pierwszy polega na tzw. „rachunku kątów". Dowód geometryczny sprowadza się do wyznaczenia miar pewnych istotnych w zadaniu kątów i wyciągnięciu właściwych wniosków z przeprowadzonych obliczeń. W takich zadaniach pokonanie zasadniczych trudności zadania może polegać na właściwym wybraniu kątów „wyjściowych" i wyznaczeniu (za ich pomocą) miar innych kątów. Dokończenie rozwiązania sprowadza się wówczas do wyciągnięcia wniosków. Drugi typ zadań to proste nierówności geometryczne, w dowodzie których wykorzystuje się tzw. nierówność trójkąta. Pokonanie zasadniczych trudności zadania może polegać na właściwym wyborze trójkątów i zapisaniu nierówności trójkąta dla nich. Znów dokończenie rozwiązania może polegać na zebraniu razem tych nierówności. Wreszcie trzeci typ zadań to proste zadania, w których korzysta się z przystawania trójkątów. Pokonanie zasadniczych trudności zadania może polegać na właściwym wyborze trójkątów i pełnym uzasadnieniu ich przystawania (dokończenie rozwiązania polega wówczas na wyciągnięciu wniosku) lub na właściwym wyborze trójkątów, stwierdzeniu ich przystawania i wyciągnięciu poprawnego wniosku przy braku pełnego uzasadnienia przystawania.

We wszystkich przedstawionych dowodach korzystamy z następujących twierdzeń geometrycznych, które powinny być dobrze znane każdemu maturzyście:

1. Suma kątów trójkąta jest równa 180°.
   1.a. Suma kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równa 90°.
   1.b. Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.
   1.c. Suma kątów czworokąta jest równa 360°.
2. Kąty wierzchołkowe są równe.
3. Suma kątów przyległych jest równa 180°.

4. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe.
5. Kąty odpowiadające i naprzemianległe przy dwóch prostych równoległych są równe.
   5.a. Suma kątów położonych przy tym samym boku równoległoboku jest równa 180°.
   5.b. Przeciwległe kąty równoległoboku są równe.
6. Suma dwóch boków trójkąta jest większa od boku trzeciego.
7. Boki trójkąta położone naprzeciw równych kątów są równe.

Korzystamy także z trzech cech przystawania trójkątów.

2.1. Zadania z rozwiązaniami

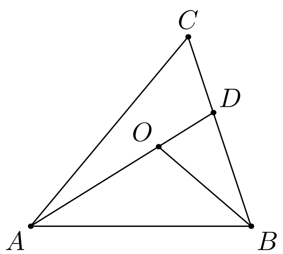
2.1.1. Rachunek kątów

Zadanie 1.

Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $\sphericalangle AOB > \sphericalangle ACB$.

I sposób rozwiązania

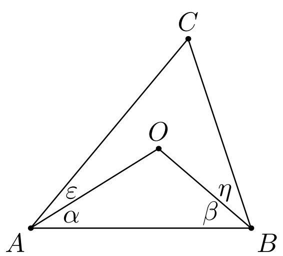
Przedłużmy odcinek AO do przecięcia z bokiem BC trójkąta ABC.



Kąt AOB jest kątem zewnętrznym trójkąta BDO; zatem $\sphericalangle AOB > \sphericalangle BDO$. Kąt BDO jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC; zatem $\sphericalangle BDO > \sphericalangle ACD$. Stąd wynika, że $\sphericalangle AOB > \sphericalangle ACD$.

II sposób rozwiązania

Oznaczmy kąty tak jak na rysunku:



Mamy wówczas

$$\sphericalangle BAC = \alpha + \varepsilon, \quad \sphericalangle ABC = \beta + \eta.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACB &= 180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta - \varepsilon - \eta = \\ &= (180^\circ - \alpha - \beta) - (\varepsilon + \eta) = \sphericalangle AOB - (\varepsilon + \eta),\end{aligned}$$

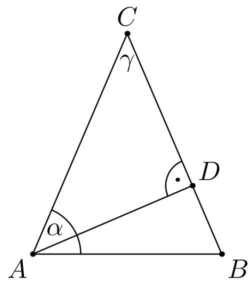
a więc $\sphericalangle ACB < \sphericalangle AOB$.

Zadanie 2.

Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle BAD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy $\sphericalangle ACB = \gamma$ oraz $\sphericalangle BAC = \alpha$.



Wtedy $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$, czyli $\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Stąd dostajemy

$$\sphericalangle BAD = \alpha - \sphericalangle CAD = \alpha - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - 90^\circ + \gamma = \frac{\gamma}{2},$$

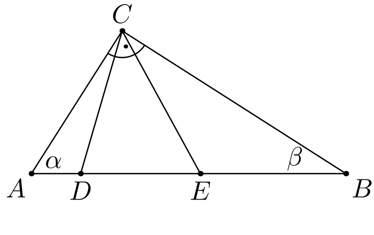
czyli $\sphericalangle ACB = \gamma = 2 \cdot \sphericalangle BAD$.

Zadanie 3.

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\sphericalangle DCE = 45^\circ$.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąty ostre trójkąta ABC tak jak na rysunku:



Ponieważ $AC = AE$, więc $\sphericalangle ACE = \sphericalangle AEC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Stąd wynika, że $\sphericalangle BCE = \frac{\alpha}{2}$. W podobny sposób pokazujemy, że $\sphericalangle ACD = \frac{\beta}{2}$. Zatem

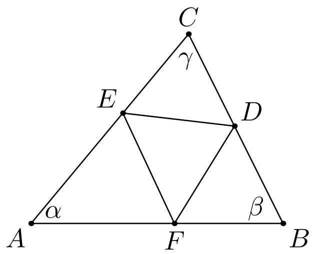
$$\sphericalangle DCE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ oraz $\sphericalangle ACB = \gamma$. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ i $CD = CE$. Udowodnij, że

$$\sphericalangle EFD = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Rozwiązanie



Ponieważ trójkąt FEA jest równoramienny (z założenia mamy $FA = EA$), więc

$$\sphericalangle AFE = \sphericalangle AEF = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Podobnie trójkąt DFB jest równoramienny, skąd wynika, że

$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle BDF = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Stąd dostajemy

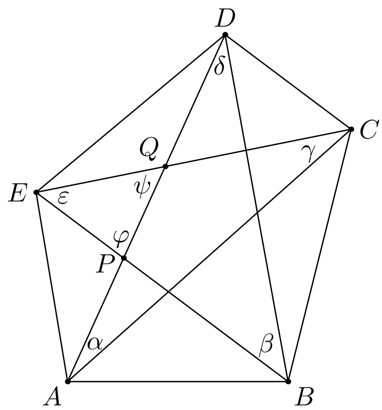
$$\sphericalangle EFD = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Zadanie 5.

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ poprowadzono wszystkie przekątne. Oblicz sumę kątów $\sphericalangle CAD + \sphericalangle DBE + \sphericalangle ECA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BEC$.

Rozwiązanie

Niech P i Q będą punktami przecięcia przekątnej AD odpowiednio z przekątnymi BE i CE. Oznaczmy kąty literami greckimi tak jak na rysunku:



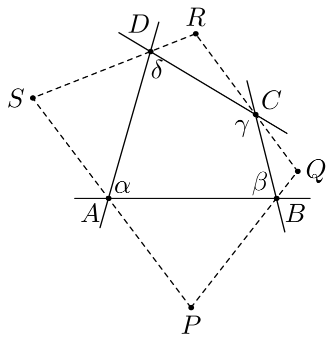
Kąt φ jest kątem zewnętrznym trójkąta BDP, a więc $\varphi = \beta + \delta$. Kąt ψ jest kątem zewnętrznym trójkąta ACQ, więc $\psi = \alpha + \gamma$. Suma kątów trójkąta PQE jest równa $\varphi + \psi + \varepsilon = 180^\circ$, skąd wynika, że $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ$.

Zadanie 6.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R i S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $PQRS$ są równe.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąty tak jak na rysunku:



Wówczas $\sphericalangle PAB = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Podobnie $\sphericalangle PBA = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Stąd dostajemy $\sphericalangle APB = \frac{\alpha + \beta}{2}$. W podobny sposób $\sphericalangle CRD = \frac{\gamma + \delta}{2}$. Zatem

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CRD = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

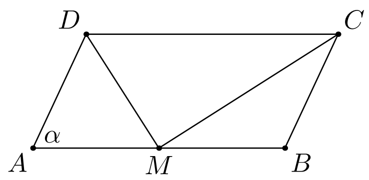
i podobnie $\sphericalangle BQC + \sphericalangle DSA = 180^\circ$.

Zadanie 7.

W równoległoboku $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC, połączono środek M boku AB z wierzchołkami C i D. Udowodnij, że kąt CMD jest prosty.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąt BAD literą α. Trójkąty MDA i MCB są równoramienne, bo $AD=AM=MB=CB$.



Zatem $\sphericalangle AMD=\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}$ oraz $\sphericalangle BMC=\dfrac{180^\circ-(180^\circ-\alpha)}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$. Stąd wynika, że

$$\sphericalangle AMD+\sphericalangle BMC=\frac{180^\circ-\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=90^\circ,$$

czyli $\sphericalangle CMD=90^\circ$.

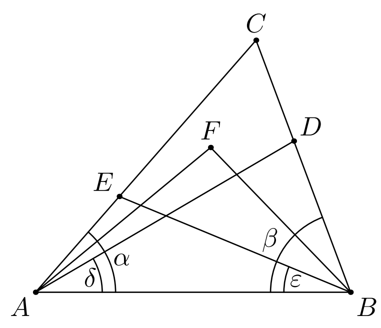
Zadanie 8.

Punkty D i E leżą odpowiednio wewnątrz boków BC i AC trójkąta ABC. Punkt F jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAD i CBE. Udowodnij, że

$$\sphericalangle AEB+\sphericalangle ADB=2\cdot\sphericalangle AFB.$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia: $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle CBA=\beta$, $\sphericalangle DAB=\delta$ oraz $\sphericalangle EBA=\varepsilon$:



Zauważmy, że

$$\sphericalangle AEB=180^\circ-(\alpha+\varepsilon)\quad\text{oraz}\quad\sphericalangle ADB=180^\circ-(\beta+\delta).$$

Zatem

$$\sphericalangle AEB+\sphericalangle ADB=360^\circ-(\alpha+\beta+\delta+\varepsilon).$$

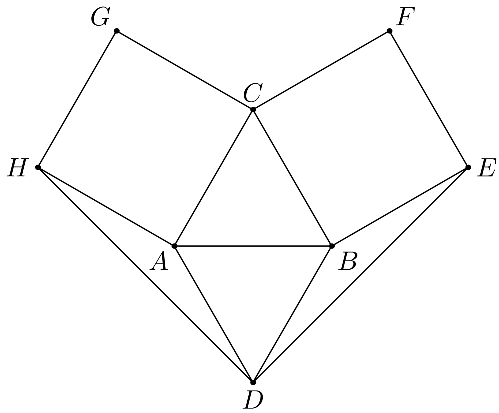
Ponieważ punkt F leży na dwusiecznych kątów CAD i CBE, więc

$$\sphericalangle FAB=\frac{\alpha+\delta}{2}\quad\text{oraz}\quad\sphericalangle FBA=\frac{\beta+\varepsilon}{2}.$$

Zatem
$$\sphericalangle AFB = 180° - (\sphericalangle FAB + \sphericalangle FBA) = 180° - \frac{\alpha+\beta+\delta+\varepsilon}{2}.$$
Stąd natychmiast wynika, że $\sphericalangle AEB + \sphericalangle ADB = 2 \cdot \sphericalangle AFB$.

Zadanie 9.

Na bokach trójkąta równobocznego ABC, na zewnątrz trójkąta, zbudowano dwa kwadraty $BEFC$ i $ACGH$ oraz trójkąt równoboczny ABD tak jak na rysunku:



Udowodnij, że kąt HDE jest prosty.

Rozwiązanie

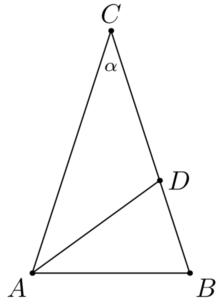
Ponieważ $AH = AC = AB = AD$, więc trójkąt HDA jest równoramienny. Następnie
$$\sphericalangle HAD = 360° - \sphericalangle HAC - \sphericalangle CAB - \sphericalangle BAD = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°,$$
skąd wynika, że
$$\sphericalangle HDA = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle HAD) = 15°.$$
Podobnie dowodzimy, że $\sphericalangle BDE = 15°$. Zatem
$$\sphericalangle HDE = \sphericalangle HDA + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDE = 15° + 60° + 15° = 90°,$$
c.b.d.o.

Zadanie 10.

Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne BDA i CAD tak, że $AB = AD = CD$. Udowodnij, że $\sphericalangle ACB = 36°$.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąt ACB literą α.



Ponieważ trójkąt CAD jest równoramienny, więc $\sphericalangle CAD = \alpha$. Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta CAD, więc

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD = 2\alpha.$$

Trójkąt BDA jest równoramienny, więc $\sphericalangle ABD = 2\alpha$. Wreszcie $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$, bo trójkąt ABC jest równoramienny. Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie dostajemy teraz równanie

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ,$$

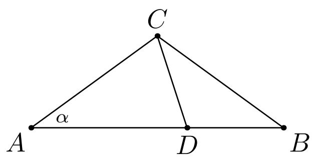
czyli $2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$. Zatem $5\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 36^\circ$.

Zadanie 11.

Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem CD na dwa trójkąty równoramienne DCA i BCD tak, że $AC = AD$ oraz $CD = BD$. Udowodnij, że $\sphericalangle CAB = 36^\circ$.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąt BAC literą α.



Wówczas $\sphericalangle ABC = \alpha$ (bo trójkąt ABC jest równoramienny) oraz $\sphericalangle BCD = \alpha$ (bo trójkąt BCD jest równoramienny). Zatem $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DBC = 2\alpha$. Ponieważ trójkąt DCA jest równoramienny, więc $\sphericalangle ACD = 2\alpha$. Stąd wynika, że $\sphericalangle ACB = 3\alpha$. Mamy zatem równanie

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ,$$

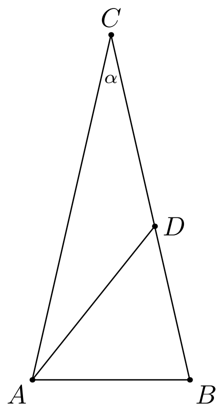
czyli $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180^\circ$. Zatem $5\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 36^\circ$.

Zadanie 12.

Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne DAB i CAD tak, że $AB = DB$ oraz $CD = AD$. Udowodnij, że $\sphericalangle ACB = \frac{180^\circ}{7}$.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąt ACB literą α.



Ponieważ trójkąt CAD jest równoramienny, więc $\sphericalangle \mathrm{CAD} = \alpha$. Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta CAD, więc

$$\sphericalangle \mathrm{ADB} = \sphericalangle \mathrm{CAD} + \sphericalangle \mathrm{ACD} = 2\alpha.$$

Trójkąt DAB jest równoramienny, więc $\sphericalangle \mathrm{BAD} = 2\alpha$. Stąd wynika, że $\sphericalangle \mathrm{BAC} = 3\alpha$ oraz $\sphericalangle \mathrm{ABC} = \sphericalangle \mathrm{BAC} = 3\alpha$, bo trójkąt ABC jest równoramienny. Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie dostajemy teraz równanie

$$\sphericalangle \mathrm{BAC} + \sphericalangle \mathrm{ABC} + \sphericalangle \mathrm{ACB} = 180^\circ,$$

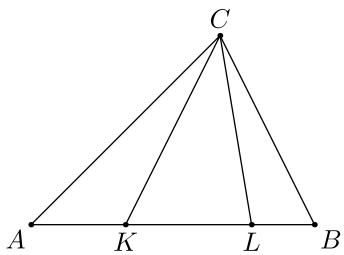
czyli $3\alpha + 3\alpha + \alpha = 180^\circ$. Zatem $7\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = \dfrac{180^\circ}{7}$.

2.1.2. Nierówność trójkąta

Zadanie 13.

Punkty K i L leżą na boku AB trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLC jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

Rozwiązanie



Korzystamy dwukrotnie z nierówności trójkąta:

$$KC < AK + AC,$$
$$LC < LB + BC.$$

Dodajemy stronami te nierówności, a następnie do obu stron dodajemy KL:

$$KC + LC + KL < AK + AC + LB + BC + KL = AB + AC + BC.$$

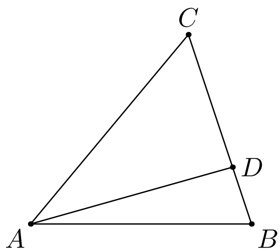
Zadanie 14.

W trójkącie ABC połączono wierzchołek A z dowolnym punktem D boku BC. Udowodnij, że

$$2 \cdot AD > AB + AC - BC.$$

Rozwiązanie

Korzystamy dwukrotnie z nierówności trójkąta dla trójkątów ABD i ACD:



Otrzymujemy

$$AB < AD + BD,$$
$$AC < AD + CD.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy

$$AB + AC < 2 \cdot AD + BD + CD = 2 \cdot AD + BC,$$

czyli $2 \cdot AD > AB + AC - BC$.

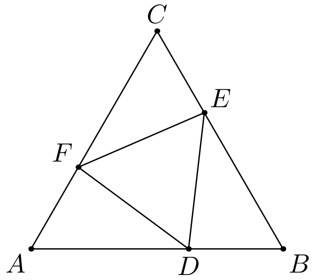
2.1.3. Przystawanie trójkątów

Zadanie 15.

Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC leżą odpowiednio punkty D, E i F tak, że $AD = BE = CF$. Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

Rozwiązanie

Ponieważ $AD = BE = CF$ i $AB = BC = CA$, więc $DB = EC = FA$.



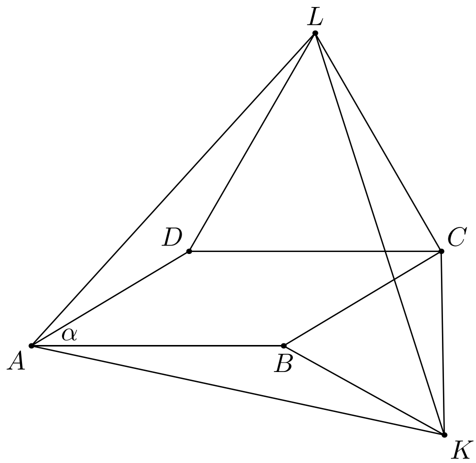
Teraz zauważamy, że $\triangle ADF \equiv \triangle BED \equiv \triangle CFE$ (cecha przystawania *bkb*), skąd wynika, że $DE = EF = FD$.

Zadanie 16.

Na bokach BC i CD równoległoboku ABCD zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że kąt α jest kątem ostrym równoległoboku oraz $\alpha < 60^\circ$. Pozostałe przypadki pozostawimy jako ćwiczenie.



Wówczas $AB = LD = LC$ oraz $BK = DA = CK$. Ponadto

$$\sphericalangle ABK = 360^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBK = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 60^\circ = 120^\circ + \alpha,$$
$$\sphericalangle LDA = 360^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle LDC = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 60^\circ = 120^\circ + \alpha,$$
$$\sphericalangle LCK = \sphericalangle BCD + \sphericalangle BCK + \sphericalangle LCD = \alpha + 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ + \alpha.$$

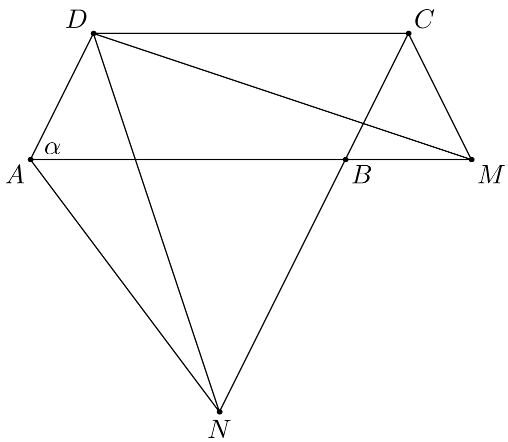
Stąd wynika, że trójkąty ABK, LDA i LCK są przystające, a więc $AK = LA = LK$.

Zadanie 17.

Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Na półprostej AB wyznaczono punkt M ($M \neq B$) taki, że $CB = CM$, a na półprostej CB punkt N ($N \neq B$) taki, że $AB = AN$. Udowodnij, że $DM = DN$.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąt BAD literą α.



Wtedy $\sphericalangle BCD = \alpha$. Zauważmy następnie, że trójkąty BMC i NBA są równoramienne i ich kąty przy podstawie są równe (bo kąty MBC i NBA są wierzchołkowe). Zatem $\sphericalangle BCM = \sphericalangle NAB$ i stąd wynika, że

$$\sphericalangle NAD = \sphericalangle NAB + \alpha = \sphericalangle BCM + \alpha = \sphericalangle DCM.$$

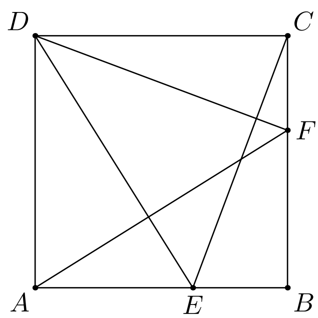
Zatem trójkąty NAD i DCM są przystające (cecha przystawania *bkb*) i $DN = DM$.

Zadanie 18.

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $EB+BF=AB$. Udowodnij, że suma kątów BAF, EDF i ECB wynosi 90°.

Rozwiązanie

Ponieważ $EB = AB - BF$, więc $AE = AB - EB = AB - (AB - BF) = BF$. Zatem także $EB = FC$.



Z założeń wynika, że trójkąty ABF i DAE są przystające ($AB=DA$, $AE=BF$, $\sphericalangle ABF=\sphericalangle DAE=90^\circ$, cecha przystawania *bkb*). Podobnie trójkąty CBE i DCF są przystające. Stąd wynika, że

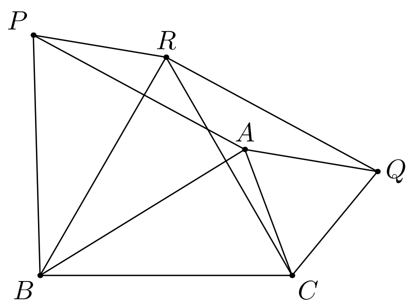
$$\sphericalangle BAF+\sphericalangle EDF+\sphericalangle ECB=\sphericalangle ADE+\sphericalangle EDF+\sphericalangle FDC=\sphericalangle ADC=90^\circ.$$

Zadanie 19.

Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano trzy trójkąty równoboczne: APB, BRC i CQA. Trójkąt BRC leży po tej samej stronie boku BC co trójkąt ABC, pozostałe dwa leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty A, P, R i Q są współliniowe lub są wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że punkty A, P, R i Q nie są współliniowe. Rozpatrujemy tylko przypadek, gdy $\sphericalangle CBA < 60^\circ$, tzn. gdy półprosta BA leży wewnątrz kąta CBR. Pozostałe przypadki zostawiamy Czytelnikowi.



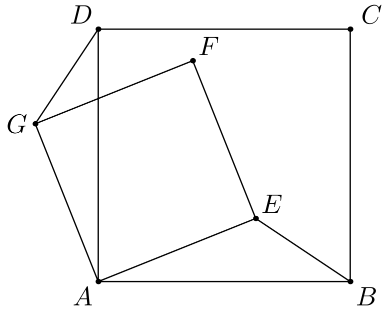
Trójkąty BAC i BRP są przystające ($\sphericalangle CBA=60^\circ-\sphericalangle ABR=\sphericalangle RBP$, $BC=BR$, $BA=BP$, cecha przystawania *bkb*). Zatem $PR=AC$. W podobny sposób dowodzimy, że trójkąty BCA i RCQ są przystające. Zatem $AQ=QC=AC$. Stąd wynika, że $PR=AQ$. Z tego drugiego przystawania wynika również, że $PA=BA=RQ$. Czworokąt $PAQR$ ma zatem przeciwległe boki równe, a więc jest równoległobokiem.

Zadanie 20.

Dane są dwa kwadraty: $ABCD$ i $AEFG$. W obu kwadratach podana kolejność wierzchołków jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara. Udowodnij, że $BE=DG$.

Rozwiązanie

Rozpatrujemy przypadek, gdy wierzchołek E leży wewnątrz kwadratu $ABCD$. Inne przypadki pozostawiamy jako ćwiczenie.



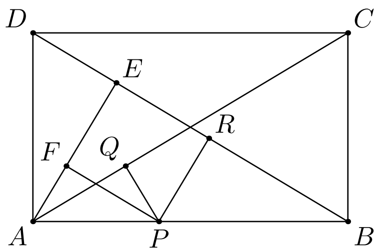
Trójkąty ABE i ADG są przystające ($\sphericalangle BAE = 90^\circ - \sphericalangle EAD = \sphericalangle DAG$, $AB = AD$, $AE = AG$, cecha przystawania *bkb*). Zatem $BE = DG$.

Zadanie 21.

Punkt P leży na boku AB prostokąta $ABCD$. Punkty Q i R są rzutami prostokątnymi punktu P na przekątne AC i BD. Punkt E jest rzutem prostokątnym wierzchołka A na przekątną BD. Udowodnij, że $PQ + PR = AE$.

Rozwiązanie

Niech E będzie rzutem prostokątnym punktu A na przekątną BD i niech F będzie rzutem punktu P na odcinek AE.



Czworokąt $PREF$ jest prostokątem, więc $PR = FE$. Zauważamy teraz, że $PF \parallel BD$, skąd wynika, że $\sphericalangle APF = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle PAQ$. Stąd wynika, że trójkąty prostokątne APF i PAQ są przystające. Zatem $PQ = AF$, czyli $PQ + PR = AF + FE = AE$, co kończy dowód.

Rozdział 3

Zadania na dowodzenie Geometria, cz. II

Wojciech Guzicki
konsultacja: Elżbieta Sepko-Guzicka

W arkuszach maturalnych w ostatnich dwóch latach znalazły się zadania geometryczne na dowodzenie. Za poprawne rozwiązanie takiego zadania w arkuszu podstawowym zdający mógł otrzymać 2 punkty, w arkuszu rozszerzonym 4 punkty lub 3 punkty. Przy wystawianiu oceny za rozwiązanie zadania na dowodzenie kierowano się zasadą, że dowód matematyczny powinien być kompletny i tylko w wyjątkowych sytuacjach można uznać, że zdający „pokonał zasadnicze trudności zadania", nie doprowadzając przy tym rozwiązania do końca.

W tym opracowaniu, będącym kontynuacją pierwszej części, pokazuję 22 kolejne zadania geometryczne na dowodzenie, w większości o podobnym stopniu trudności jak zadania ze wspomnianych wyżej arkuszy. Przyjmuję natomiast, że za poprawne rozwiązanie każdego z tych zadań przyznaje się 2 lub 3 punkty (3 punkty w przypadku zadań z arkusza rozszerzonego). Kwestia, za jakie rozwiązanie częściowe można przyznać 1 punkt (lub 2 punkty, jeśli chodzi o zadanie za 3 punkty), wymaga w każdym przypadku dalszej dyskusji.

W pierwszej części pokazałem trzy typy zadań na dowodzenie. Pierwszy polegał na „rachunku kątów". Drugi typ zadań to proste nierówności geometryczne, w dowodzie których wykorzystuje się nierówność trójkąta. Wreszcie trzeci typ zadań to zadania, w których korzysta się z przystawania trójkątów. W tej części pokazuję zadania, w których korzystamy z twierdzenia Pitagorasa oraz z podstawowych twierdzeń dotyczących geometrii okręgu. Chcę tu zwrócić uwagę na to, że niektóre zadania zostały sformułowane jako zadania na dowodzenie, chociaż główna część dowodu to po prostu obliczenie (np. wykorzystujące twierdzenie Pitagorasa). Chciałem w ten sposób uwidocznić, że niektóre zadania obliczeniowe są w istocie zadaniami, w których konieczne jest przeprowadzenie rozumowania, a obliczenie jest tylko jego częścią. Główna część rozwiązania może polegać na ułożeniu równania; rozwiązanie tego równania jest już sprawą rutynową. Ułożenie równania czasem wymaga rozumowania na tyle nietrywialnego, że kwalifikuje zadanie nie jako zadanie sprawdzające umiejętność *modelowanie* czy *strategia*, ale jako zadanie na rozumowanie, wnioskowanie.

We wszystkich przedstawionych dowodach korzystamy z następujących twierdzeń geometrycznych, które powinny być dobrze znane każdemu maturzyście:

1. Twierdzenie Pitagorasa.
2. Twierdzenie o kątach środkowych i wpisanych.
3. Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą.
4. Twierdzenie o równości odcinków stycznych.
5. Warunki konieczne i wystarczające na to, by czworokąt można było wpisać w okrąg lub opisać na okręgu.
6. Twierdzenie o współliniowości środków okręgów i punktu styczności.

3.1. Zadania z rozwiązaniami

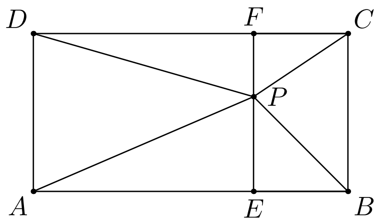
3.1.1. Twierdzenie Pitagorasa

Zadanie 1.

Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P położony wewnątrz tego prostokąta. Udowodnij, że $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$.

Rozwiązanie

Niech E i F będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki AB i CD prostokąta.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AP^2+CP^2=AE^2+EP^2+CF^2+FP^2$$

oraz

$$BP^2+DP^2=BE^2+EP^2+DF^2+FP^2.$$

Ponieważ $AE=DF$ i $BE=CF$, więc $AP^2+CP^2=BP^2+DP^2$.

Uwaga

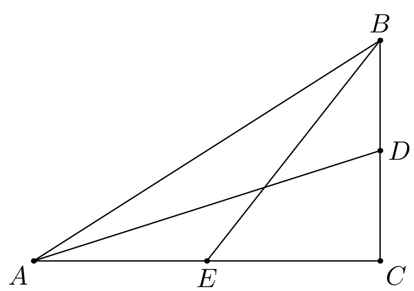
Twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego punktu P (położonego niekoniecznie na tej samej płaszczyźnie co prostokąt $ABCD$).

Zadanie 2.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC z kątem prostym przy wierzchołku C. W tym trójkącie poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $4\cdot(AD^2+BE^2)=5\cdot AB^2$.

Rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ACD i BCE.



Mamy wówczas $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot BC\right)^2 = AC^2 + \frac{1}{4} \cdot BC^2$, czyli $4 \cdot AD^2 = 4 \cdot AC^2 + BC^2$. Podobnie dowodzimy, że $4 \cdot BE^2 = AC^2 + 4 \cdot BC^2$. Dodając stronami dwie ostatnie równości dostajemy:

$$4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot (AC^2 + BC^2) = 5 \cdot AB^2.$$

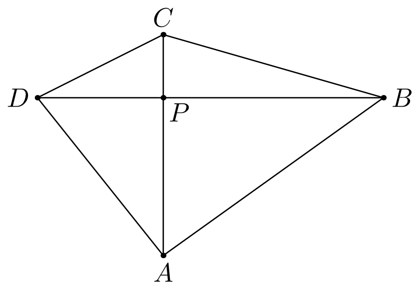
Zadanie 3.

Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Udowodnij, że

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Rozwiązanie

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.



Mamy wówczas

$$AB^2 + CD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AP^2 + DP^2 + BP^2 + CP^2 = AD^2 + BC^2.$$

Uwaga

Warunek $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ były prostopadłe.

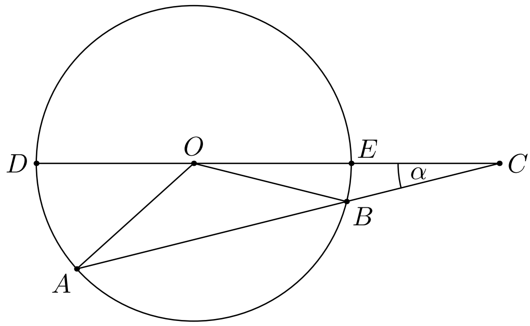
3.1.2. Geometria okręgu

Zadanie 4.

Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Cięciwę AB tego okręgu przedłużono poza punkt B do punktu C takiego, że $BC = r$. Półprosta CO przecina okrąg w dwóch punktach D i E; punkt D leży na zewnątrz odcinka CO, punkt E leży wewnątrz tego odcinka. Udowodnij, że $\sphericalangle AOD = 3 \cdot \sphericalangle ACD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle ACD$. Ponieważ $BC = r = OB$, więc $\sphericalangle BOC = \alpha$.



Kąt ABO jest kątem zewnętrznym trójkąta COB, więc $\sphericalangle ABO = 2\alpha$. Trójkąt ABO jest równoramienny, więc $\sphericalangle BAO = 2\alpha$ i stąd $\sphericalangle AOB = 180^\circ - 4\alpha$. Zatem

$$\sphericalangle AOD = 180^\circ - \sphericalangle AOB - \sphericalangle BOC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha,$$

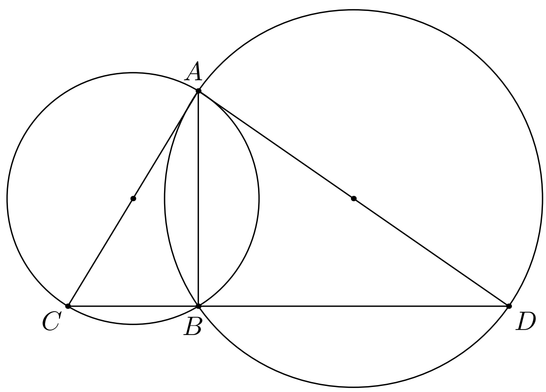
czyli $\sphericalangle AOD = 3 \cdot \sphericalangle ACD$.

Zadanie 5.

Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B i D są współliniowe.

Rozwiązanie

Poprowadźmy odcinek AB.



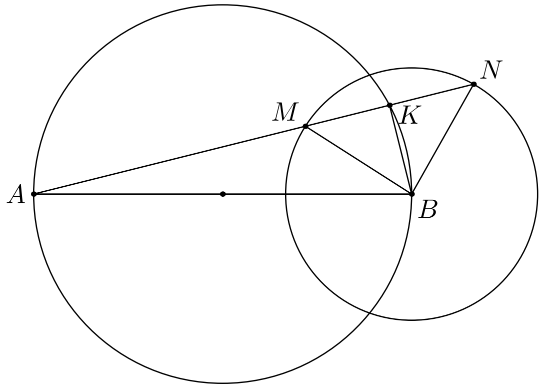
Ponieważ AC jest średnicą jednego z danych okręgów, więc $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Podobnie AD jest średnicą drugiego okręgu, a więc $\sphericalangle ABD = 90^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle CBD = 180^\circ$, czyli punkty C, B i D są współliniowe.

Zadanie 6.

Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodząca przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i przecina drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że $KM = KN$.

Rozwiązanie

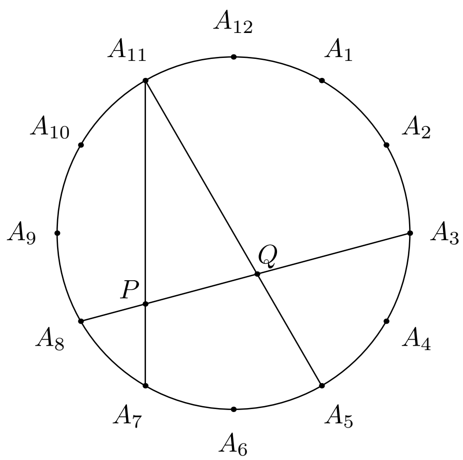
Ponieważ punkt K leży na okręgu o średnicy AB, więc $\sphericalangle AKB = 90°$.



BK jest więc wysokością trójkąta MBN. Ponieważ punkty M i N leżą na okręgu o środku B, więc punkt B leży na symetralnej odcinka MN; tą symetralną jest zatem prosta BK. Stąd wynika, że $KM = KN$.

Zadanie 7.

Punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dzielą okrąg na 12 równych łuków, tak jak na rysunku:



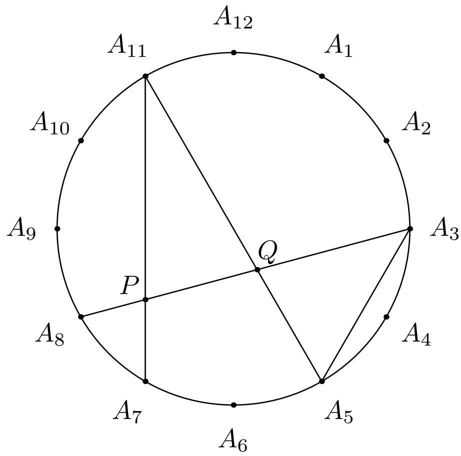
Cięciwa A_8A_3 przecina cięciwy $A_{11}A_7$ i $A_{11}A_5$ odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że trójkąt PQA_{11} jest równoramienny.

Rozwiązanie

Najpierw zauważmy, że $\sphericalangle A_6A_{11}A_5 = \sphericalangle A_7A_{11}A_6 = 15°$. Zatem

$$\sphericalangle PA_{11}Q = \sphericalangle A_7A_{11}A_5 = 2 \cdot 15° = 30°.$$

Dorysujmy teraz cięciwę A_3A_5.



Mamy wówczas

$$\sphericalangle QA_3A_5 = \sphericalangle A_8A_3A_5 = 3\cdot 15^\circ = 45^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QA_5A_3 = \sphericalangle A_{11}A_5A_3 = 4\cdot 15^\circ = 60^\circ.$$

Możemy teraz obliczyć miarę trzeciego kąta trójkąta QA_5A_3:

$$\sphericalangle A_5QA_3 = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ.$$

Stąd dostajemy $\sphericalangle PQA_{11} = 75^\circ$ oraz

$$\sphericalangle QPA_{11} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ.$$

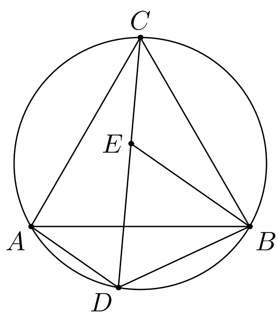
Ponieważ $\sphericalangle PQA_{11} = \sphericalangle QPA_{11}$, więc $PA_{11} = QA_{11}$.

Zadanie 8.

Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkt D leży na krótszym łuku AB. Punkt E leży na odcinku CD oraz $DE = DB$. Udowodnij, że trójkąty BAD i BCE są przystające.

Rozwiązanie

Na cięciwie DC rysujemy taki punkt E, by $DE = DB$.



Ponieważ $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB = 60^\circ$ oraz $DE = DB$, więc trójkąt DBE jest równoboczny. Zatem $BD = BE$. Ponieważ $BA = BC$ oraz $\sphericalangle DBA = 60^\circ - \sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC$, więc trójkąty BAD i BCE są przystające (cecha *bkb*).

Uwaga

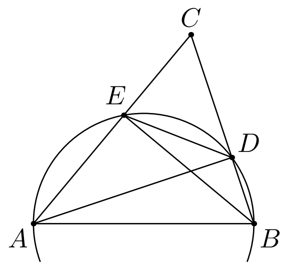
Z przystawania trójkątów BAD i BCE wynika w szczególności, że $DA = EC$. Mamy zatem $DC = DE + EC = DB + DA$. Udowodniliśmy zatem twierdzenie mówiące, że jeśli trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg oraz punkt D leży na krótszym łuku AB, to $AD + BD = CD$. Tak sformułowane zadanie było zadaniem olimpijskim.

Zadanie 9.

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Wykaż, że $\sphericalangle EDC = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle DEC = \sphericalangle ABC$.

Rozwiązanie

Ponieważ kąty AEB i ADB są proste, więc punkty E i D leżą na okręgu o średnicy AB. Czworokąt $ABDE$ jest więc wpisany w okrąg.



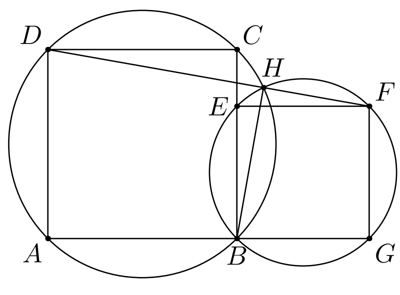
Zatem $\sphericalangle EDB = 180° - \sphericalangle BAE$, skąd wynika, że $\sphericalangle EDC = \sphericalangle BAC$. Podobnie dowodzimy, że $\sphericalangle DEC = \sphericalangle ABC$.

Zadanie 10.

Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Kwadrat $BEFG$ leży na zewnątrz kwadratu $ABCD$. Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punktach B i H. Udowodnij, że punkty D, H i F są współliniowe.

Rozwiązanie

Połączmy punkt H z punktami D, B i F.



Ponieważ punkt H leży na okręgu opisanym na kwadracie $ABCD$, więc

$$\sphericalangle BHD = \sphericalangle BCD = 90°.$$

Punkt H leży także na okręgu opisanym na kwadracie BEFG. Zatem

$$\sphericalangle BHF = \sphericalangle BEF = 90^\circ.$$

Stąd wynika, że $\sphericalangle DHF = 180^\circ$, czyli punkty D, H i F są współliniowe.

Uwaga

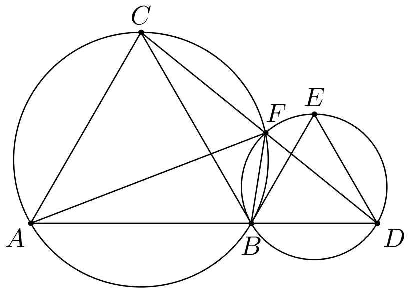
Można udowodnić, że punkty C, H i G są współliniowe, a także, że punkty A, E i H są współliniowe. Stąd wynika, że proste AE, CG i DF przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 11.

Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.

Rozwiązanie

Połączmy punkt F z punktami A, B, C i D.



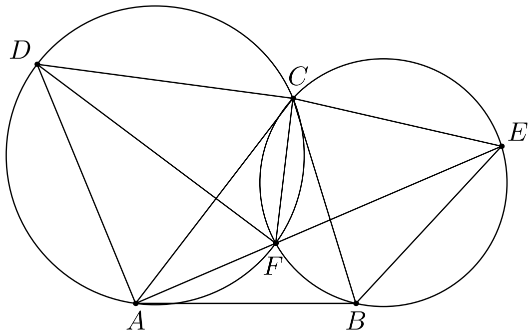
Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Zatem $\sphericalangle CFA = \sphericalangle CBA = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Ponieważ punkt F leży też na okręgu opisanym na trójkącie BDE, więc $\sphericalangle BFD = \sphericalangle BED = 60^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle CFD = 180^\circ$. Punkty C, F i D są więc współliniowe.

Zadanie 12.

Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, dwa trójkąty równoboczne ACD i BCE. Okręgi opisane na tych trójkątach równobocznych przecinają się w punktach C i F. Udowodnij, że punkty A, F i E są współliniowe.

Rozwiązanie

Połączmy punkt F z punktami A, D, C i E.



Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ACD. Zatem $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ACD = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DAC = 60^\circ$. Ponieważ punkt F leży też na okręgu opisanym na trójkącie BCE, więc $\sphericalangle CFE = \sphericalangle CBE = 60^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle AFE = 180^\circ$. Punkty A, F i E są więc współliniowe.

Uwaga

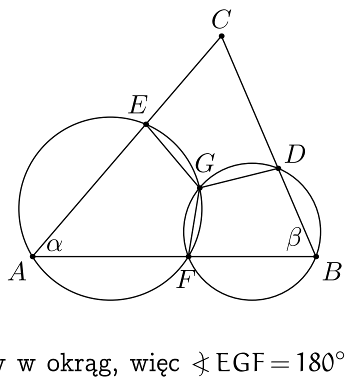
Punkt F nazywamy punktem Torricellego trójkąta ABC. Jest to punkt, dla którego suma odległości $AF + BF + CF$ jest najmniejsza.

Zadanie 13.

Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF przecinają się w punktach F i G. Udowodnij, że $\sphericalangle DGE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC$.

Rozwiązanie

Oznaczmy kąty BAC i ABC literami α i β. Połączmy punkt G z punktami D, E i F.



Czworokąt $AFGE$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle EGF = 180^\circ - \alpha$. Podobnie pokazujemy, że $\sphericalangle DGF = 180^\circ - \beta$. Stąd otrzymujemy

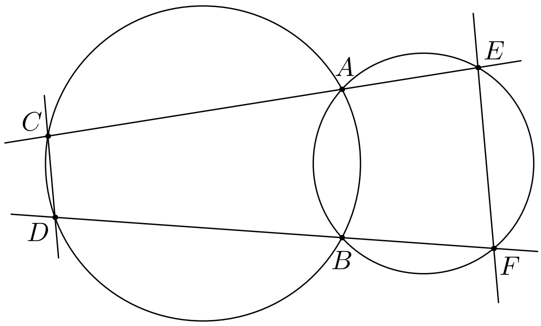
$$\sphericalangle DGE = 360^\circ - \sphericalangle EGF - \sphericalangle DGF = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta.$$

Uwaga

Z powyższego zadania wynika wniosek: na czworokącie $CEGD$ można opisać okrąg. Inaczej mówiąc, okręgi opisane na trójkątach AFE, BDF i CED mają punkt wspólny. Tak sformułowane twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Miguela i jego treść była zadaniem olimpijskim.

Zadanie 14.

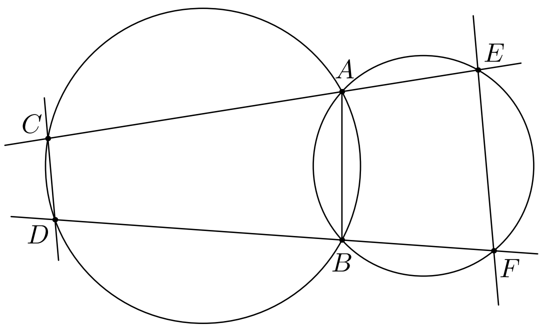
Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F różnych od B (zob. rysunek).



Udowodnij, że proste CD i EF są równoległe.

Rozwiązanie

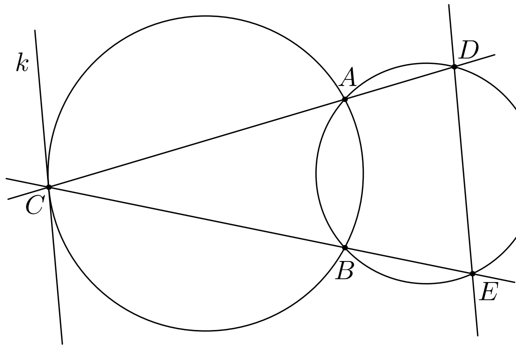
Narysujmy odcinek AB.



Czworokąt CDBA jest wpisany w okrąg. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle CDB$. Kąty BAC i BAE są przyległe, więc $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BAE$. Czworokąt ABFE jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BFE = 180^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle CDF + \sphericalangle DFE = 180^\circ$, a więc proste CD i EF są równoległe.

Zadanie 15.

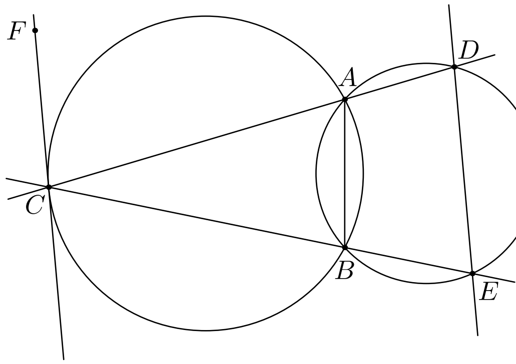
Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste przechodzące przez punkty A i B przecinają jeden z tych okręgów w punkcie C różnym od A i B oraz przecinają drugi okrąg odpowiednio w punktach D i E różnych od A i B. Prosta k jest styczna do pierwszego okręgu w punkcie C (zob. rysunek).



Udowodnij, że prosta k jest równoległa do prostej DE.

Rozwiązanie

Narysujmy odcinek AB i wybierzmy punkt F na prostej k tak jak na rysunku:



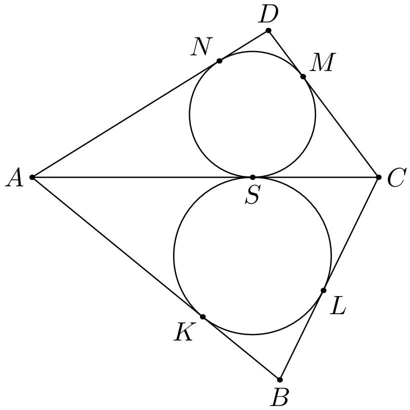
Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą wynika, że $\sphericalangle FCA = \sphericalangle CBA$. Ponieważ kąty CBA i EBA są przyległe, więc $\sphericalangle FCA + \sphericalangle EBA = 180^\circ$. Czworokąt $ABED$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle EBA + \sphericalangle EDA = 180^\circ$. Stąd wynika, że $\sphericalangle FCA = \sphericalangle EDA$. Równość tych kątów naprzemianległych dowodzi, że proste CF i DE są równoległe.

Zadanie 16.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Udowodnij, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie

Niech okrąg wpisany w trójkąt ABC będzie styczny do boków tego trójkąta w punktach K, L i S, i niech okrąg wpisany w trójkąt ACD będzie styczny do boków tego trójkąta w punktach S, M i N, tak jak na rysunku:



Mamy wówczas, na podstawie twierdzenia o równości odcinków stycznych:

$$AK = AS = AN,$$
$$CL = CS = CM,$$
$$BK = BL,$$
$$DM = DN.$$

Stąd

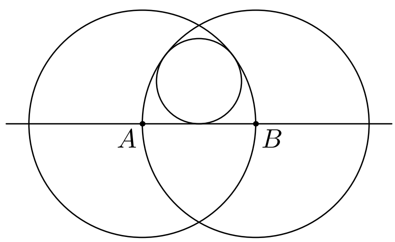
$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = AD + BC,$$

co dowodzi, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

3.1.3. Okręgi styczne

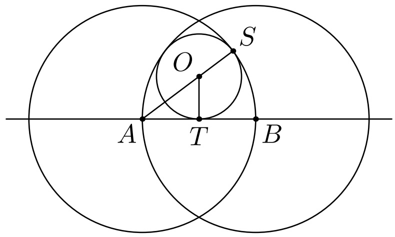
Zadanie 17.

Dany jest odcinek AB długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB oraz styczny wewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{3}{4}$.



Rozwiązanie

Niech punkt O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do dwóch danych okręgów i do prostej AB. Niech S i T będą punktami styczności tego okręgu z okręgiem o środku A i z prostą AB (zob. rysunek):



Niech r będzie promieniem okręgu o środku O. Zauważmy, że wówczas

$$AT=1, \quad OT=r, \quad AO=2-r.$$

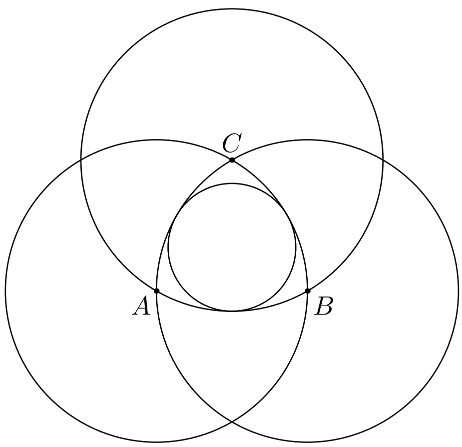
Ostatnia równość wynika z tego, że punkty A, O i S są współliniowe. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ATO otrzymujemy $AT^2+OT^2=AO^2$, czyli

$$1^2+r^2=(2-r)^2.$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $r=\frac{3}{4}$.

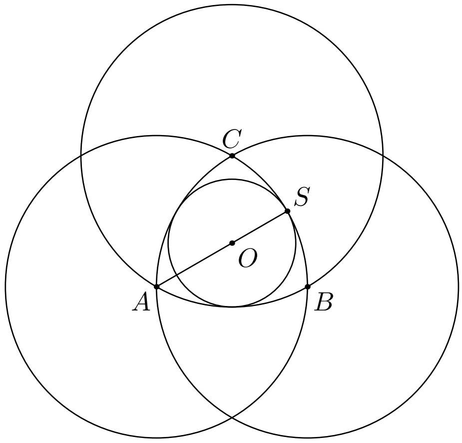
Zadanie 18.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 2. Punkty A, B i C są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg zawarty wewnątrz tych trzech okręgów, styczny wewnętrznie do nich (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})$.



Rozwiązanie

Niech O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do trzech danych okręgów i niech S będzie punktem styczności tego okręgu z okręgiem o środku A (zob. rysunek):

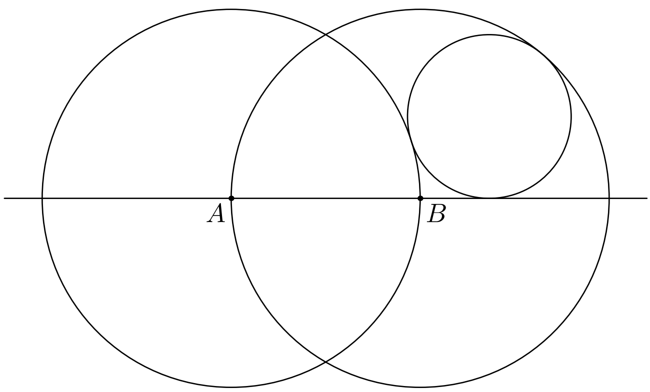


Oczywiście punkt O jest środkiem ciężkości trójkąta ABC oraz punkty A, O i S są współliniowe. Mamy wówczas

$$\mathrm{OS} = \mathrm{AS} - \mathrm{AO} = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot (3 - \sqrt{3}).$$

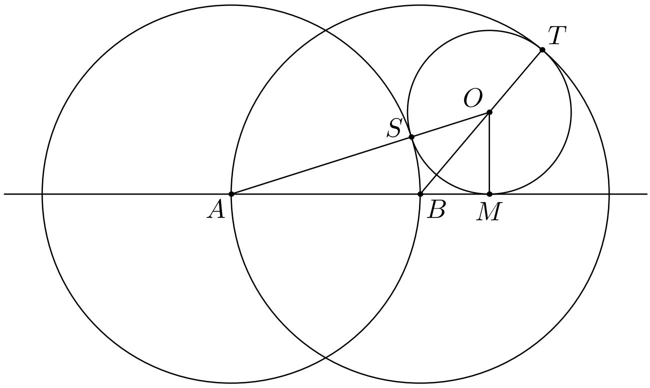
Zadanie 19.

Dany jest odcinek AB długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB, styczny zewnętrznie do okręgu o środku A oraz styczny wewnętrznie do okręgu o środku B (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Rozwiązanie

Niech punkt O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do danych okręgów o środkach A i B. Niech następnie S i T będą punktami styczności okręgu o środku O z okręgami o środkach A i B. Wreszcie niech M będzie punktem styczności okręgu o środku O z prostą AB (zob. rysunek):



Przyjmijmy oznaczenia:

$$BM = x, \quad OM = r.$$

Punkty A, S i O są współiniowe, więc $AO = 2+r$. Podobnie punkty B, O i T są współiniowe, więc $BO = 2-r$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AMO i BMO otrzymujemy równania

$$AM^2 + OM^2 = AO^2, \quad BM^2 + OM^2 = BO^2,$$

czyli

$$(2+x)^2 + r^2 = (2+r)^2, \quad x^2 + r^2 = (2-r)^2.$$

Przekształcamy pierwsze równanie, podstawiając $(2-r)^2$ w miejsce $x^2 + r^2$:

$$\begin{gathered}
(2+x)^2 + r^2 = (2+r)^2,\\
4+4x+x^2+r^2 = 4+4r+r^2,\\
4x+(2-r)^2 = 4r+r^2,\\
4x+4-4r+r^2 = 4r+r^2,\\
4x+4-4r = 4r,\\
x = 2r-1.
\end{gathered}$$

Obliczoną wartość x podstawiamy do równania $x^2 + r^2 = (2-r)^2$:

$$\begin{gathered}
x^2 + r^2 = (2-r)^2,\\
(2r-1)^2 + r^2 = (2-r)^2,\\
4r^2 - 4r + 1 + r^2 = 4 - 4r + r^2,\\
4r^2 = 3,
\end{gathered}$$

skąd otrzymujemy $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.1.4. Twierdzenie Pitagorasa i okręgi

Zadanie 20.

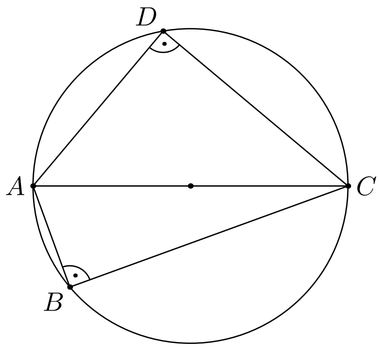
Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Jeden kąt tego czworokąta jest prosty. Udowodnij, że jeszcze co najmniej jeden kąt jest prosty oraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.

Rozwiązanie

Niech

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

Załóżmy, że kąt ABC jest prosty. Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika, że przekątna AC jest średnicą okręgu, a następnie, że kąt ADC jest prosty.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABC i ADC wynika teraz, że

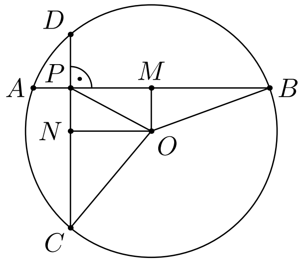
$$a^2+b^2+c^2+d^2 = (AB^2+BC^2)+(CD^2+DA^2) = AC^2+AC^2 = 2\cdot(2r)^2 = 8r^2.$$

Zadanie 21.

W okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o długościach $2a$ i $2b$ przecinające się w punkcie P. Udowodnij, że $OP^2+a^2+b^2 = 2r^2$.

Rozwiązanie

Poprowadźmy w okręgu o środku O i promieniu r prostopadłe cięciwy $AB = 2a$ i $CD = 2b$. Niech M i N będą rzutami prostokątnymi środka O na cięciwy AB i CD.



Mamy wówczas $MB = a$ i $NC = b$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów BMO i CNO dostajemy

$$OM^2 = OB^2 - MB^2 = r^2 - a^2 \quad \text{oraz} \quad ON^2 = C^2 - NC^2 = r^2 - b^2.$$

Czworokąt PNOM jest prostokątem, więc

$$OP^2 = OM^2 + ON^2 = 2r^2 - (a^2+b^2),$$

skąd wynika, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

Zadanie 22.

Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątne tego czworokąta są prostopadłe. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.

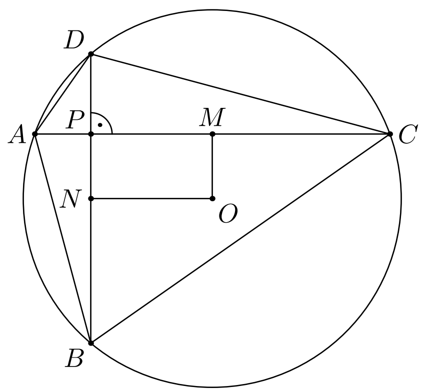
Rozwiązanie

Niech

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD i niech punkty M i N będą środkami tych przekątnych. Niech wreszcie

$$AP = x, \quad BP = y, \quad CP = z, \quad DP = t.$$



Mamy wówczas

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 = x^2 + y^2, \\ BC^2 &= BP^2 + CP^2 = y^2 + z^2, \\ CD^2 &= CP^2 + DP^2 = z^2 + t^2, \\ DA^2 &= DP^2 + AP^2 = t^2 + x^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Ponieważ

$$AC = x + z = 2 \cdot \frac{x+z}{2} \quad \text{oraz} \quad BD = y + t = 2 \cdot \frac{y+t}{2},$$

więc z poprzedniego zadania dostajemy

$$OP^2 = 2r^2 - \left(\left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 \right).$$

Następnie

$$PM = AM - AP = \frac{x+z}{2} - x = \frac{z-x}{2},$$
$$PN = DN - DP = \frac{y+t}{2} - t = \frac{y-t}{2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
2r^2 &= OP^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+t}{2}\right)^2 = \\
&= PM^2 + PN^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+t}{2}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{z-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+t}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{z^2 - 2xz + x^2 + y^2 - 2yt + t^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 - 2yt + t^2}{4} = \\
&= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4r^2,$$

czyli

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Uwaga

W zadaniach 20 i 22 udowodniliśmy, że jeśli w czworokącie o bokach długości a, b, c i d wpisanym w okrąg o promieniu r przekątne są prostopadłe lub co najmniej jeden kąt jest prosty, to

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Można udowodnić także twierdzenie odwrotne: jeśli w czworokącie o bokach długości a, b, c i d wpisanym w okrąg o promieniu r zachodzi równość

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2,$$

to przekątne tego czworokąta są prostopadłe lub co najmniej jeden kąt jest prosty. Dowód tego twierdzenia jest jednak znacznie trudniejszy; twierdzenie to było treścią zadania olimpijskiego.

Rozdział 4

Zadania na dowodzenie
Geometria, cz. III

Henryk Dąbrowski
konsultacja: Maria Pająk-Majewska i Mieczysław Fałat

Jednym z wymagań ogólnych nowej podstawy programowej z matematyki na czwartym etapie kształcenia, ale również i na wcześniejszych etapach, jest umiejętność prowadzenia rozumowania matematycznego czy argumentacji. Dlatego też w każdym arkuszu z egzaminu maturalnego z matematyki od roku 2010 znajdują się zadania sprawdzające te umiejętności. Zazwyczaj znajdują się w arkuszu co najmniej dwa zadania na dowodzenie, wśród nich jest zadanie z geometrii. Zadania te sprawiają zdającym trudności. Mają one jednak duże walory dydaktyczne, dają zdającym możliwość wykazania się pomysłowością, często do ich rozwiązania wystarczają im w zupełności umiejętności wyniesione z gimnazjum. Przedstawię kilka przykładów zadań na dowodzenie wraz z różnymi sposobami rozwiązań niektórych z nich.

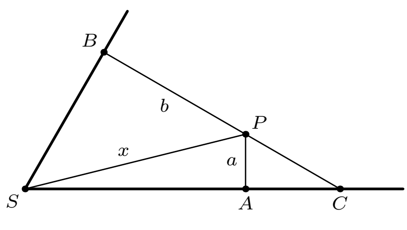
Zadanie 1.

Dany jest kąt ASB o mierze 60° oraz punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Odległości punktu P od ramion tego kąta są równe a i b. Udowodnij, że odległość punktu P od wierzchołka kąta jest równa $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

I sposób rozwiązania

Niech C będzie punktem przecięcia prostej BP i ramienia AS kąta.

Dorobić oznaczenie 60°, 30°.



Wówczas trójkąt APC to „połowa” trójkąta równobocznego, więc $PC=2a$. Zatem $BC=2a+b$.

Trójkąt SBC także jest „połową” trójkąta równobocznego, więc $BS=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2a+b}{\sqrt{3}}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BPS otrzymujemy

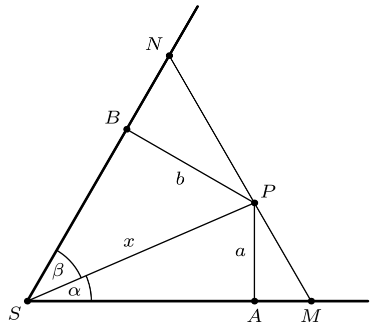
$$x=\sqrt{BS^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{2a+b}{\sqrt{3}}\right)^2+b^2}=\sqrt{\frac{4a^2+4ab+b^2}{3}+b^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

bić kąty
te

Przez punkt P poprowadźmy odcinek MN tak, żeby trójkąt MNS był równoboczny.



Wówczas trójkąty MAP i NBP to „połowy” trójkątów równobocznych, więc

$$AM=\frac{AP}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad MP=2\cdot AM=\frac{2a}{\sqrt{3}},\quad BN=\frac{BP}{\sqrt{3}}=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad PN=2\cdot BN=\frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Wynika stąd, że długość boku trójkąta MNS jest równa

$$MN=MP+NP=\frac{2a}{\sqrt{3}}+\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{2a+2b}{\sqrt{3}},$$

natomiast długość odcinka AS jest równa

$$AS=MS-AM=\frac{2a+2b}{\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a+2b}{\sqrt{3}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SAP otrzymujemy

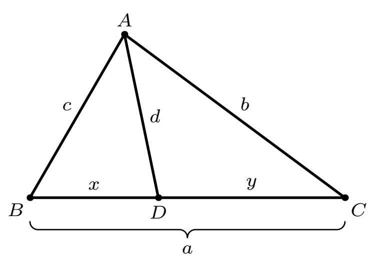
$$x=\sqrt{AS^2+a^2}=\sqrt{\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2}{3}+a^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

III sposób rozwiązania

Początkowa część rozwiązania, a więc pomysł dorysowania odcinka MN, a w efekcie „zobaczenie” trójkąta równobocznego otwiera zupełnie nowe możliwości. Jedną z nich jest zastosowanie twierdzenie Stewarta. Przypomnijmy najpierw to twierdzenie, którego dowód możemy, jako nietrudne zadanie, podać uczniom przy okazji omawiania twierdzenia cosinusów.

Twierdzenie Stewarta. Jeżeli punkt D leży na boku BC trójkąta ABC i dzieli ten bok na odcinki o długościach $BD=x$ i $DC=y$ oraz $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ i $AD=d$, to $d^2a=b^2x+c^2y-axy$.



W naszym trójkącie MNS mamy więc

$$SP^2 \cdot MN = MS^2 \cdot NP + NS^2 \cdot MP - MN \cdot MP \cdot NP.$$

Trójkąt jest równoboczny, więc obie strony tej równości możemy podzielić przez MN=MS=NS. Wtedy otrzymujemy

$$SP^2 = MS \cdot NP + NS \cdot MP - MP \cdot NP,$$

czyli

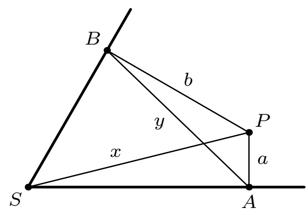
$$x^2 = \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} + \frac{2a+2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\big((a+b)b + (a+b)a - ab\big) =$$
$$= \frac{4}{3}\left((a+b)^2 - ab\right) = \frac{4}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

skąd $x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$, co należało wykazać.

IV sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinek AB i przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.

Dorobić znac
kąta 60°



Trójkąty PAS i PBS są prostokątne, więc $AS^2 = x^2 - a^2$ oraz $BS^2 = x^2 - b^2$. Kąty PSA i PSB tych trójkątów dają w sumie 60°, więc kąty SPA i SPB sumują się do $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie APB otrzymujmy

$$y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 120^\circ = a^2 + b^2 - 2ab\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + ab + b^2,$$

a z twierdzenia cosinusów w trójkącie ASB otrzymujmy

$$y^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS \cdot BS\cos 60^\circ = x^2 - a^2 + x^2 - b^2 - 2\sqrt{x^2-a^2} \cdot \sqrt{x^2-b^2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= 2x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{x^2-a^2} \cdot \sqrt{x^2-b^2}.$$

Przyrównując prawe strony otrzymanych równości dostajemy

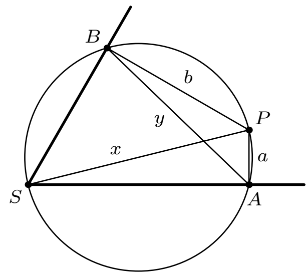
$$2x^2 - a^2 - b^2 - \sqrt{x^2-a^2} \cdot \sqrt{x^2-b^2} = a^2 + ab + b^2,$$
$$2x^2 - \sqrt{x^2-a^2} \cdot \sqrt{x^2-b^2} = 2a^2 + ab + 2b^2.$$

Po dosyć uciążliwych rachunkach otrzymujmy tezę.

V sposób rozwiązania

Tak jak w IV sposobie obliczamy $y = \sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Zauważmy teraz, że skoro trójkąty PAS i PBS są prostokątne i ich wspólną przeciwprostokątną jest odcinek PS, to okrąg o średnicy PS jest opisany na każdym z tych trójkątów, a także na trójkącie ABS.



Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABS wynika, że $\frac{y}{\sin\sphericalangle ASB}=x$, czyli $\frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=x$, skąd

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2},$$

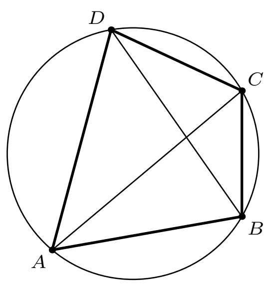
co kończy ten dowód.

Zauważenie, że na czworokącie $SAPB$ można opisać okrąg również otwiera przed nami nowe możliwości rozwiązania zadania. Pokażemy jedną z nich.

VI sposób rozwiązania

Tak jak w poprzednim sposobie rozwiązania wykazujemy, że na czworokącie $SAPB$ można opisać okrąg. Wykorzystamy teraz twierdzenie Ptolemeusza.

Twierdzenie Ptolemeusza. Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to iloczyn długości jego przekątnych równy jest sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.



$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

Znajomość twierdzenia Ptolemeusza, podobnie jak przytoczonego wcześniej twierdzenia Stewarta, wykracza poza oczekiwany od maturzysty zakres „narzędzi i środków”, więc te narzędzia mogą wykorzystać jedynie Ci zdający, którzy przygotowywali się do konkursów lub olimpiady matematycznej.

Wracamy do naszego zadania.

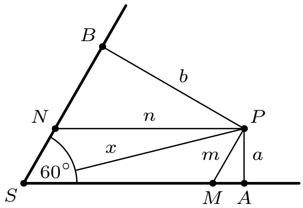
Po obliczeniu długości przekątnej AB (np. tak, jak w III sposobie rozwiązania) oraz długości boków $AS=\sqrt{x^2-a^2}$ i $BS=\sqrt{x^2-b^2}$, otrzymujemy z twierdzenia Ptolemeusza równanie

$$x\sqrt{a^2+ab+b^2}=a\sqrt{x^2-b^2}+b\sqrt{x^2-a^2},$$

z którego wyznaczamy x.

VII sposób rozwiązania

Tym razem poprowadźmy odcinki MP i NP równoległe do ramion kąta, tak jak na rysunku. Długości tych odcinków oznaczmy literami m i n.



W ten sposób otrzymaliśmy równoległobok $SMPN$ o kącie ostrym $60°$, bokach długości m i n, którego przekątna SP ma długość x. Zauważmy, że a i b to wysokości tego równoległoboku. Zapiszmy jego pole na trzy sposoby

$$P_{SMPN}=n\cdot a=m\cdot b=m\cdot n\cdot\sin 60°,$$

czyli

$$n\cdot a=m\cdot b=m\cdot n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Z równości $n\cdot a=m\cdot n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $m\cdot b=m\cdot n\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ wyznaczmy $m=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ oraz $n=\frac{2b}{\sqrt{3}}$.

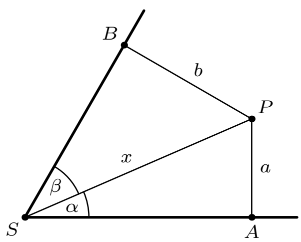
Kąt SMP równoległoboku jest równy $120°$, więc z twierdzenia cosinusów w trójkącie SMP otrzymujemy

$$x^2=\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2b}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120°=\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{3}b^2-2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2b}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{4}{3}a^2+\frac{4}{3}b^2+\frac{4ab}{3}=\frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Stąd $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$, co należało udowodnić.

VIII sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas $\sin\alpha = \frac{a}{x}$, $\sin\beta = \frac{b}{x}$ oraz $\alpha+\beta = 60^\circ$.
Obliczmy cosinus kąta $\alpha+\beta$.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}.$$

Kąty α i β są ostre, więc

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2} \text{ oraz } \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2}.$$

Stąd i z poprzedniej równości dostajemy

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2} - \frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x} = \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4}} = \frac{1}{2}+\frac{ab}{x^2}.$$

Pozostaje tylko stąd obliczyć x. Podnosząc obie strony do kwadratu dostajemy kolejno:

$$1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4} = \frac{1}{4}+\frac{ab}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^4},$$

$$1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2} = \frac{1}{4}+\frac{ab}{x^2},$$

$$\frac{3}{4} = \frac{a^2+ab+b^2}{x^2},$$

$$x^2 = \frac{4}{3}\left(a^2+ab+b^2\right),$$

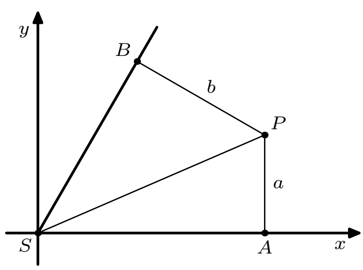
$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

IX sposób rozwiązania

ać znaczek prostego

Umieśćmy kąt w układzie współrzędnych, tak jak na rysunku.



Wtedy $S=(0,0)$, $P=(x_A,a)$, gdzie $x_A>0$ i $A=(x_A,0)$. Ramię SB jest zawarte w prostej nachylonej do osi Ox pod kątem 60°, więc współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy $\mathrm{tg}60^\circ = \sqrt{3}$. Zatem jej równanie ma postać $y=\sqrt{3}x$, czyli $\sqrt{3}x-y=0$.

Odległość punktu P od prostej SB jest równa

$$\frac{\left|\sqrt{3}x_A - a\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}x_A - a\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_A - a\right),$$

gdyż punkt P leży poniżej prostej SB.

Zatem $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x_A - a\right) = b$, skąd $x_A = \frac{a+2b}{\sqrt{3}}$, czyli $A = \left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

Ze wzoru na długość odcinka otrzymujemy

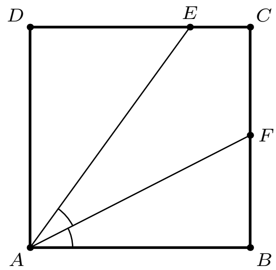
$$SP = \sqrt{\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2+4ab+4b^2+3a^2}{3}} = \sqrt{\frac{4a^2+4ab+4b^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

To kończy dowód.

Zadanie 2.

Na boku CD kwadratu ABCD leży punkt E. Dwusieczna kąta BAE przecina bok BC tego kwadratu w punkcie F (zobacz rysunek).

Dodać dwa k
α

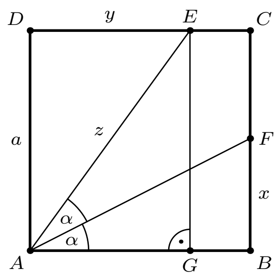


Udowodnij, że $AE = BF + DE$.

Tym razem prezentowane rozwiązania będą podane w kolejności od rozwiązania „siłowego" do rozwiązania „eleganckiego".

I sposób rozwiązania

Poprowadźmy odcinek EG prostopadły do boku AB. Niech $AD = a$, $AE = z$, $BF = x$, $DE = y$ oraz $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF = \alpha$. Pokażemy więc, że $x + y = z$.



Z trójkąta AEG otrzymujemy $\operatorname{tg}\sphericalangle GAE = \frac{EG}{AG}$, czyli $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{a}{y}$.

Z trójkąta ABF otrzymujemy natomiast $\operatorname{tg} \sphericalangle BAF = \frac{BF}{AB}$, czyli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}$.

Ze wzoru na tangens podwojonego kąta i otrzymanych równości mamy

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a}{y},$$

$$\frac{2\cdot\frac{x}{a}}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{a}{y},$$

$$\frac{2ax}{a^2-x^2} = \frac{a}{y},$$

$$2xy = a^2 - x^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE otrzymujemy $a^2 = z^2 - y^2$, więc

$$2xy = z^2 - y^2 - x^2,$$

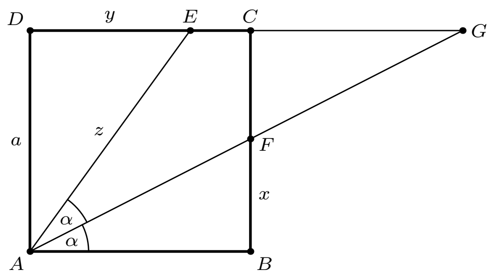
$$x^2 + 2xy + y^2 = z^2,$$

$$(x+y)^2 = z^2.$$

Stąd $x + y = z$, co należało udowodnić.

II sposób rozwiązania

Przedłużmy odcinek AF do przecięcia z prostą DC i punkt tego przecięcia oznaczmy literą G. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie, jak w poprzednim sposobie rozwiązania ($AD = a$, $AE = z$, $BF = x$, $DE = y$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAF = \alpha$).



Proste AB i DC są równoległe, więc kąty BAF i CGF są równe, czyli $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$. To oznacza, że trójkąt AGE jest równoramienny. Zatem $EG = AE = z$. Stąd wynika, że

$$DG = DE + EG = y + z.$$

Trójkąty ABF i GDA są podobne (oba są prostokątne i $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$), więc $\frac{DG}{AD} = \frac{AB}{BF}$, czyli $\frac{y+z}{a} = \frac{a}{x}$.

Stąd otrzymujemy $a^2 = x(y+z)$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADE wynika natomiast, że $a^2 = z^2 - y^2$, więc

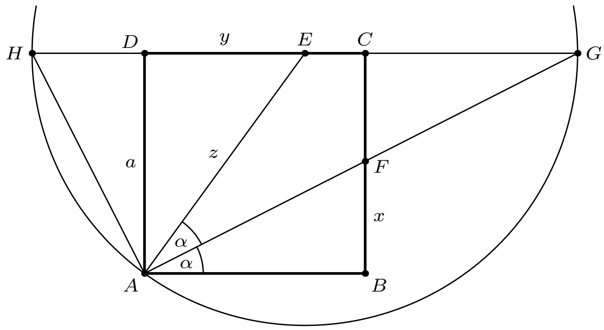
$$z^2 - y^2 = x(y+z),$$

$$(z-y)(z+y)=x(y+z).$$

Dzieląc obie strony tej równości przez $y+z$ otrzymujemy tezę.

III sposób rozwiązania

Przedłużmy odcinek AF do przecięcia z prostą DC w punkcie G oraz narysujmy odcinek AH prostopadły do odcinka AG tak, żeby jego koniec H leżał na prostej DC. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak poprzednio.



Jak w poprzednim sposobie rozwiązania zauważamy, że kąty BAF i CGF są równe, bo proste AB i DC są równoległe, czyli $\sphericalangle CGF = \sphericalangle BAF = \alpha$ oraz wnioskujemy stąd, że trójkąt AGE jest równoramienny. Zatem $EG=AE=z$. Trójkąt GAH jest prostokątny, $EG=AE=z$, więc punkt E jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a odcinek GH jest jego średnicą. Zatem

$$HE=AE=GE=z.$$

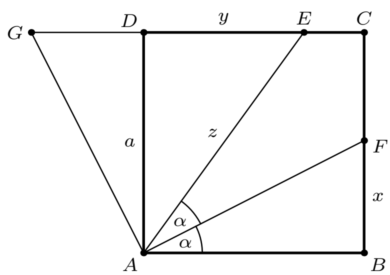
Ponadto kąt ostry przy wierzchołku H tego trójkąta jest równy $90^\circ-\alpha$ (bo drugi kąt ostry AGH to α). To z kolei oznacza, że kąt ostry DAH w trójkącie prostokątnym ADH jest równy α. Stąd wnioskujemy, że trójkąty ADH i ABF są przystające, bo (oprócz równości odpowiednich kątów) ich przyprostokątne AD i AB są równe. Zatem $HD=BF=x$, więc

$$z=AE=HD+DE=x+y.$$

To należało udowodnić.

IV sposób rozwiązania

Przyjmijmy te same oznaczenia jak w poprzednich dwóch sposobach rozwiązania i na prostej DC wybierzmy taki punkt G nie leżący na odcinku CD, żeby $GD=BF=x$. Poprowadźmy też odcinek AG.



Trójkąty ABF i ADG są zatem przystające (oba są prostokątne, $GD=BF=x$, $AD=AB=a$). Stąd $\sphericalangle GAD=\alpha$ oraz $\sphericalangle AGD=90^\circ-\alpha$.

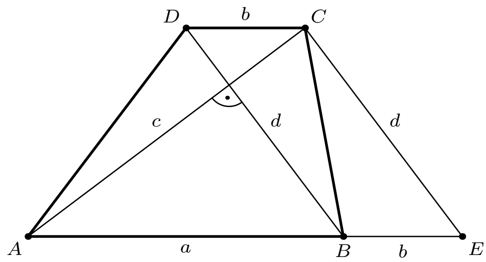
Zauważmy teraz, że $\sphericalangle GAE=\sphericalangle GAD+\sphericalangle DAE=\alpha+(90^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha$. To z kolei oznacza, że trójkąt AEG jest równoramienny a jego ramiona to AE i GE. Zatem $AE=GE$, czyli $z=x+y$, co właśnie należało udowodnić.

Zadanie 3.

Wykaż, że jeżeli trapez ma prostopadłe przekątne, to suma kwadratów długości tych przekątnych jest równa kwadratowi sumy długości jego podstaw.

I sposób rozwiązania

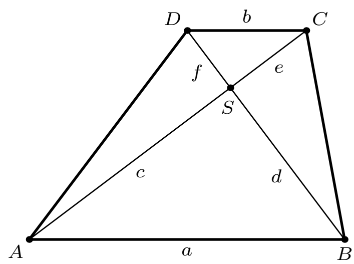
Oznaczmy przez c i d długości przekątnych trapezu, zaś przez a i b długości jego podstaw. Poprowadźmy odcinek CE równoległy do BD tak, żeby koniec E tego odcinka leżał na prostej AB, jak na rysunku.



Wówczas czworokąt $BECD$ jest równoległobokiem. Zatem $CE=d$ i $BE=b$. Ponieważ AC i BD są prostopadłe, BD i CE są równoległe, więc AC i CE są prostopadłe. To oznacza, że trójkąt ACE jest prostokątny. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zatem $AC^2+CE^2=AE^2$, czyli $c^2+d^2=(a+b)^2$, co właśnie należało udowodnić.

II sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku.



Wówczas teza ma postać $(c+e)^2+(d+f)^2=(a+b)^2$, a po rozwinięciu nawiasów

$$c^2+2ce+e^2+d^2+2df+f^2=a^2+2ab+b^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach ABS i CDS otrzymujemy $a^2=c^2+d^2$ oraz $b^2=e^2+f^2$, więc równość, jaką mamy udowodnić, możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\left(c^2+d^2\right)+2ce+2df+\left(e^2+f^2\right)=a^2+2ab+b^2,$$

$$a^2+2(ce+df)+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$ce+df=ab.$$

Pozostaje więc wykazać prawdziwość tej równości.

Trójkąty ABS i CDS są podobne, gdyż kąty BAS i DCS są równe, podobnie jak kąty ABS i CDS, jako kąty naprzemianległe wyznaczone przez dwie proste równoległe. Zatem $\frac{c}{a}=\frac{e}{b}$ oraz $\frac{d}{a}=\frac{f}{b}$, skąd $c=\frac{a}{b}\cdot e$ oraz $d=\frac{a}{b}\cdot f$. Wobec tego równość $ce+df=ab$ jest równoważna równości

$$\frac{a}{b}\cdot e^2+\frac{a}{b}\cdot f^2=ab,$$

$$\frac{a}{b}\cdot\left(e^2+f^2\right)=ab.$$

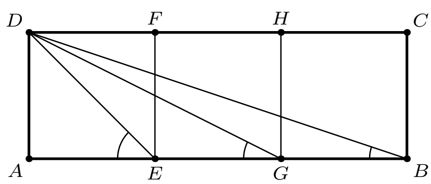
Wcześniej już zauważyliśmy, że $b^2=e^2+f^2$, więc $\frac{a}{b}\cdot b^2=ab$, czyli $ab=ab$, co jest oczywiście prawdą.

Każde z omawianych zadań można, jak widać, rozwiązać na kilka sposobów i nie ma jednego „słusznego” sposobu. Do jakich więc sposobów rozwiązań nakłaniać uczniów? Odpowiedź wbrew pozorom nie jest łatwa. Jest wypadkową wielu czynników, takich jak sprawność rachunkowa ucznia, ilość czasu potrzebna na takie rozwiązanie, czy też jakieś indywidualne upodobania ucznia wynikające z jego wcześniejszych własnych zmagań z zadaniami. Wydaje mi się jednak, że wskazanym byłoby przynajmniej od czasu do czasu pokazać uczniowi kilka możliwych rozwiązań zadania i omówić trudności każdej z metod. Na egzaminie maturalnym nie przyznaje się zdającym punktów za „wrażenie artystyczne”, podczas zajęć z uczniami można jednak o rozwiązaniach „siłowych” i tych „eleganckich” rozmawiać.

Na zakończenie proponuję trzy zadania, które można rozwiązać zarówno metodami „siłowymi”, jak i nieco bardziej elegancko. Proponuję coś dorysować.

Zadanie 4.

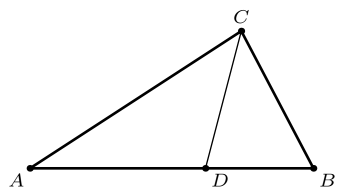
Prostokąt $ABCD$ jest złożony z trzech kwadratów: $AEFD$, $EGHF$ i $GBCH$, tak jak na rysunku.



Uzasadnij, że $\sphericalangle AED+\sphericalangle AGD+\sphericalangle ABD=90^\circ$.

Zadanie 5.

Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB tego trójkąta w punkcie D (zobacz rysunek).

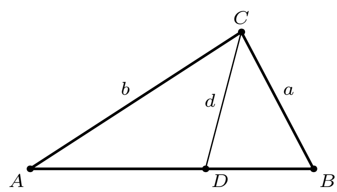


Wykaż, że $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$.

Jest to twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

Zadanie 6.

Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB tego trójkąta w punkcie D. Oznaczmy długości odcinków AC, BC i DC odpowiednio b, a, d (zobacz rysunek).



Wykaż, że $d < \frac{2ab}{a+b}$.

Rozdział 5

Zadania z kombinatoryki czyli o sztuce zliczania

Wojciech Guzicki
konsultacja: Waldemar Rożek

Wykłady z kombinatoryki, które tu przedstawiam, są przeznaczone dla nauczycieli. Nie są natomiast podręcznikiem dla ucznia. Gdy uczę kombinatoryki w szkole, staram się nie nadużywać formalizmu i symboliki teoriomnogościowej. Definicje pojęć kombinatorycznych i podstawowe zasady kombinatoryczne podaję uczniom i zapisuję na tablicy słowami, bez odwoływania się do zapisu bardziej formalnego. Tak też formułuję większość zadań. W tym wykładzie w wielu miejscach będę postępował tak samo. Jednak — jak napisałem na początku — jest to wykład dla nauczycieli, do których można (a może nawet należy) mówić także językiem bardziej formalnym. Dobrze jest, by nauczyciel zobaczył, w jaki sposób można nieformalne rozumowania kombinatoryczne zapisać w języku, który poznał w czasie studiów wyższych. Tym językiem jest oczywiście język teorii mnogości.

Chcę jednak podkreślić, że formalizm na ogół utrudnia, a nie ułatwia zrozumienie — chyba, że jesteśmy z tym formalizmem bardzo dobrze oswojeni. Dla ucznia — niezależnie od tego, czy jest to uczeń gimnazjum czy liceum — formalizm teoriomnogościowy jest raczej nowością. Używanie formalizmu stawia zatem ucznia wobec podwójnej trudności: odczytania, o co naprawdę chodzi w zadaniu czy rozwiązaniu zadania i zrozumienia toku rozumowania zapisanego w niecodzienny (dla niego) sposób. Kombinatoryka jest takim działem matematyki, w którym prawie niepotrzebna jest bogata teoria. Rozumowania kombinatoryczne nie wykorzystują skomplikowanych pojęć matematycznych i wymagają właściwie tylko sprytnych pomysłów — inaczej mówiąc, zgodnie z nazwą tej dziedziny matematyki, kombinowania. Dlatego na ogół nie jest potrzebny żaden skomplikowany formalizm. Starajmy się przedstawić problemy kombinatoryczne w sposób jak najprostszy, językiem codziennym, najbardziej zrozumiałym dla ucznia, i oczekujmy od niego rozumowań wyrażonych w takim samym języku.

W niektórych sytuacjach formalizm staje się bardziej potrzebny. Dotyczy to nielicznych zadań pokazanych w tych wykładach. W tych zadaniach będę zatem takiego formalizmu używał. Pamiętajmy jednak, że są to zadania trudne, nieraz znacznie wykraczające ponad program szkolny, nierzadko są to zadania o trudnościach olimpijskich. Przytaczam je tutaj głównie po to, by pokazać nauczycielom, że w dość prosty sposób można uzyskać niebanalne rezultaty.

5.1. Podstawowe oznaczenia i terminologia

Wszystkie zbiory, z którymi w tych wykładach będziemy mieli do czynienia, są zbiorami skończonymi. Inaczej mówiąc, będę tu pokazywać, na czym polega sztuka zliczania elementów zbiorów skończonych. Oczywiście nie tłumaczę uczniom, co to są zbiory skończone; zakładam, że istnieje coś takiego jak nasza wspólna intuicja skończoności. Skończone jest to, co daje się policzyć. Jeśli A jest zbiorem skończonym, to symbolem $|A|$ oznaczam **liczbę elementów** zbioru A. Nie będę używał określenia **moc** zbioru. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ symbolem $[n]$ będę oznaczał zbiór wszystkich liczb naturalnych od 1 do n. Ponadto $[0]$ jest zbiorem pustym:

$$[n] = \{1, \ldots, n\} \quad \text{dla } n \geqslant 1, \qquad [0] = \emptyset.$$

Podstawową zasadą kombinatoryki, na której opierają się wszystkie dalsze rozważania, jest:

$$|[n]| = n.$$

Inaczej mówiąc, zbiór $[n]$ jest wzorcowym przykładem zbioru n-elementowego.

Przy zliczaniu elementów zbiorów skończonych będę stosował trzy zasady (reguły) kombinatoryczne, które wprowadzę w dalszych rozdziałach.

5.2. Zasada równoliczności

Pierwszą z trzech zasad kombinatorycznych wspomnianych w rozdziale 5.1. jest zasada równoliczności.

Zasada równoliczności. Przypuśćmy, że elementy dwóch zbiorów skończonych A i B można połączyć w pary (a, b) tak, że spełnione są następujące własności:

— (R1) w każdej parze (a, b) element a należy do zbioru A i element b należy do zbioru B,
— (R2) każdy element zbioru A znajduje się w dokładnie jednej parze (a, b),
— (R3) każdy element zbioru B znajduje się w dokładnie jednej parze (a, b).

Wówczas zbiory A i B mają tyle samo elementów: $|A| = |B|$.

Zasadę równoliczności można rozszerzyć w następujący sposób. Własności (R1) i (R3) pozostawmy bez zmian. Własność (R2) zastąpmy natomiast własnością mówiącą, że każdy element zbioru A występuje w dokładnie k parach z k różnymi elementami zbioru B, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną. Wówczas ta uogólniona zasada równoliczności mówi że zachodzi równość: $k \cdot |A| = |B|$. Oczywiście dla $k = 1$ otrzymujemy zwykłą zasadę równoliczności. W notacji teoriomnogościowej ta uogólniona postać zasady równoliczności oznacza, że jeśli istnieje funkcja

$$f\colon B \xrightarrow{\text{na}} A$$

taka, że dla każdego $a \in A$ mamy $|f^{-1}(a)| = k$, to $k \cdot |A| = |B|$.

Zasada równoliczności, w terminologii teoriomnogościowej, oczywiście mówi, że jeśli istnieje funkcja

$$f\colon A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B,$$

to $|A| = |B|$.

W tym rozdziale pokażę kilka zadań ilustrujących powyższą zasadę równoliczności. Rozumowania prowadzące do rozwiązania niektórych z nich są czasem nazywane rozumowaniami „przez symetrię". Powody dla takiej nazwy staną się — mam nadzieję — jasne po obejrzeniu tych rozwiązań.

A oto te zadania wraz z rozwiązaniami.

Zadanie 1.

Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7? Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 17? Ile liczb trzycyfrowych daje resztę 1 przy dzieleniu przez 7? Ile liczb trzycyfrowych daje resztę 6 przy dzieleniu przez 7? Ile liczb trzycyfrowych daje resztę 4 przy dzieleniu przez 7?

Rozwiązanie

W tym zadaniu uczniowie często popełniają typowe błędy. Pierwszy błąd polega na tym, że źle obliczają liczbę liczb trzycyfrowych: od 999 odejmują 100, otrzymując wynik 899. Ten błąd opisywałem wyżej. Następnie wykorzystują ten zły wynik w dalszych obliczeniach, często też błędnych. Co ciekawe, w niektórych zadaniach powyższej postaci uzyskują poprawny wynik, mimo popełnianych błędów. Popatrzmy na następny błąd. Uczniowie rozumują w następujący sposób: co siódma liczba jest podzielna przez 7, więc do otrzymania odpowiedzi na pierwsze pytanie należy podzielić przez 7 liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych i odrzucić część ułamkową wyniku. Oto wyniki dzieleń:

$$900 : 7 = 128{,}57142,$$
$$899 : 7 = 128{,}42857.$$

Niezależnie od tego, czy poprawnie obliczyli liczbę liczb trzycyfrowych, czy popełnili błąd, otrzymali poprawny wynik: jest 128 takich liczb. Rozumowanie jednak jest błędne. Popatrzmy na drugie pytanie. Tym razem mamy podzielić 900 (lub 899 w przypadku popełnienia błędu na początku) przez 17. Oto wyniki dzieleń:

$$900 : 17 = 52{,}941176,$$
$$899 : 17 = 52{,}882352.$$

Tym razem uczniowie otrzymali (znów niezależnie od tego, czy popełnili pierwszy błąd, czy nie) zły wynik. Mianowicie stwierdzili, że są 52 takie liczby, podczas, gdy w rzeczywistości jest ich 53. Jak zatem należy rozwiązywać to zadanie i skąd się wziął błąd?

Obliczmy najpierw, ile jest liczb podzielnych przez 7 wśród liczb od 1 do 999. Ponieważ co siódma liczba jest podzielna przez 7, więc dzielimy 999 przez 7. Otrzymujemy wynik 142,71428. Zatem są 142 takie liczby. Teraz obliczymy, ile jest liczb podzielnych przez 7 wśród liczb od 1 do 99 (a więc „złych" liczb — bo za małych). Dzielimy 99 przez 7, otrzymując wynik 14,142857. A więc jest 14 takich „złych" liczb. Odejmujemy: $142 - 14 = 128$ i stwierdzamy, że jest 128 szukanych liczb.

Podobne dzielenia przez 17 dadzą wyniki:

$$999:17=58{,}764705,$$
$$99:17=5{,}8235294.$$

Znów odejmujemy: $58-5=53$ i otrzymujemy ten poprawny wynik — są 53 szukane liczby. Ale dlaczego tym razem mogliśmy dzielić przez 7 czy przez 17 i to było dobrze? Jeśli, na przykład, podzielimy 999 przez 7, to okaże się, że wszystkie liczby od 1 do 999 można podzielić na 142 grupy po 7 kolejnych liczb i zostanie jeszcze kilka liczb w ostatniej, niepełnej grupie (nie jest ważne, ile ich zostanie; ważne jest tylko to, że mniej niż 7):

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
…	…	…	…	…	…	…
92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105
…	…	…	…	…	…	…
988	989	990	991	992	993	994
995	996	997	998	999		

W każdej grupie podzielna przez 7 jest liczba siódma, **ostatnia**. Zatem liczb podzielnych przez 7 jest tyle, ile pełnych siedmioelementowych grup. A więc tyle, ile wynosi iloraz z dzielenia; w tym przypadku 142. Podobnie jest z liczbami od 1 do 99. To wyjaśnia, dlaczego poprawnym wynikiem jest 128.

A na czym polega błąd w metodzie stosowanej przez uczniów? Jeśli podzielimy 900 przez 7, to okaże się, że wśród liczb od 100 do 999 jest 128 pełnych grup siedmioelementowych i zostanie kilka liczb w ostatniej, niepełnej grupie:

100	101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119	120
…	…	…	…	…	…	…
989	990	991	992	993	994	995
996	997	998	999			

Zauważmy jednak, że w każdej pełnej grupie liczba podzielna przez 7 stoi na szóstym miejscu. A więc w ostatniej, czteroelementowej grupie, takiej liczby nie ma. Zatem liczb podzielnych przez 7 jest tyle, ile pełnych, siedmioelementowych grup. A więc 128. A jak jest w przypadku dzielenia przez 17? Tym razem mamy 52 pełne siedemnastoelementowe grupy i jedną niepełną grupę. Ale ta ostatnia grupa ma 16 elementów:

100	101	102	103	…	114	115	116
117	118	119	120	…	131	132	133
134	135	136	137	…	148	149	150
…	…	…	…	…	…	…	…
967	968	969	970	…	981	982	983
984	985	986	987	…	998	999	

W każdej grupie liczba podzielna przez 17 stoi na trzecim miejscu. Zatem w tej ostatniej grupie też znajduje się liczba podzielna przez 17. Stąd wynika, że szukanych liczb jest 53, mianowicie o jedną więcej niż liczba pełnych siedemnastoelementowych grup. Ten sposób rozwiązania musi więc uwzględniać także to, gdzie w rozważanych grupach liczb stoją liczby podzielne przez tę liczbę, przez którą mamy dzielić.

Pokażę teraz, w jaki sposób możemy rozwiązać zadanie za pomocą zasady równoliczności. Niech A będzie zbiorem liczb trzycyfrowych podzielnych przez 7. Są to liczby postaci $7k$, przy czym $100 \leqslant 7k \leqslant 999$. Stąd wynika, że $15 \leqslant k \leqslant 142$. Zatem

$$A = \{7k\colon\ 15 \leqslant k \leqslant 142\}.$$

Łączymy w parę liczbę $7k$ z liczbą k. W ten sposób połączymy w pary liczby ze zbioru A z liczbami ze zbioru $\{15, 16, \dots, 142\}$. Ten ostatni zbiór ma 128 elementów, a więc $|A| = 128$. Podobnie możemy pokazać, że zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez 17 ma postać

$$\{17k\colon\ 6 \leqslant k \leqslant 58\}.$$

Ten zbiór ma zatem tyle elementów, co zbiór $\{6, 7, \dots, 58\}$, czyli 53 elementy. Wreszcie zbiór liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 1, to zbiór

$$\{106, 113, 120, \dots, 995\} = \{7k+1\colon\ 15 \leqslant k \leqslant 142\}.$$

Ma on 128 elementów. Podobnie zbiór liczb trzycyfrowych dających resztę 6 przy dzieleniu przez 7, to zbiór

$$\{104, 111, 118, \dots, 993\} = \{7k+6\colon\ 14 \leqslant k \leqslant 141\}.$$

Ten zbiór też ma 128 elementów. Wreszcie zbiór liczb trzycyfrowych dających resztę 4 przy dzieleniu przez 7, to zbiór

$$\{102, 109, 116, \dots, 991, 998\} = \{7k+4\colon\ 14 \leqslant k \leqslant 142\}.$$

Ten zbiór ma 129 elementów.

Obiektem często używanym w rozumowaniach kombinatorycznych jest tzw. ciąg zerojedynkowy.

Ciągiem zerojedynkowym nazywam ciąg skończony $(a_1, \dots, a_n)$, którego każdy wyraz jest zerem lub jedynką, czyli taki, że

$$a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}.$$

Zbiór wszystkich ciągów zerojedynkowych długości n będę oznaczał symbolem $S(n)$. Symbolem $S_k(n)$ oznaczam zbiór wszystkich ciągów zerojedynkowych, w których jest dokładnie k wyrazów równych 1:

$$S_k(n) = \big\{(a_1, \dots, a_n) \in S(n)\colon\ |\{i\colon\ a_i = 1\}| = k\big\}.$$

Tak więc na przykład

$$(1,1,0,1,0,0,0,1) \in S_4(8), \qquad (1,1,1,1) \in S_4(4), \qquad (0,0,0,0) \in S_0(4).$$

Często, gdy mamy do czynienia z ciągami liczbowymi, których wyrazy są liczbami naturalnymi jednocyfrowymi (to znaczy wyrazy należą do zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$), będę opuszczał w zapisie ciągu nawiasy i przecinki. Tak więc powyższe przykłady mogę zapisać w sposób następujący:

$$11010001 \in S_4(8), \qquad 1111 \in S_4(4), \qquad 0000 \in S_0(4).$$

Zadanie 2.

Udowodnij, że liczba ciągów zerojedynkowych długości 15, w których występuje parzysta liczba jedynek, jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości 15, w których występuje nieparzysta liczba jedynek.

Rozwiązanie

Najprostsze rozwiązanie, które uczniowie znajdują najczęściej, polega na następującym łączeniu ciągów w pary. Przypuśćmy, że dany jest ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{15})$, w którym jest parzysta liczba jedynek. Łączymy go w parę z ciągiem $(b_1, b_2, \ldots, b_{15})$ określonym za pomocą wzoru:

$$b_i = 1 - a_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, 15.$$

Inaczej mówiąc każde zero zamieniamy na jedynkę i każdą jedynkę zamieniamy na zero:

- jeśli $a_i = 0$, to $b_i = 1$,
- jeśli $a_i = 1$, to $b_i = 0$.

Na przykład, ciąg 011000100111000 łączymy w parę z ciągiem 100111011000111. Oczywiście, jeśli w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{15})$ była parzysta liczba jedynek, to była nieparzysta liczba zer. Zatem w ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_{15})$ występuje nieparzysta liczba jedynek. Stąd wynika, że spełniony jest warunek (R1) z zasady równoliczności, gdzie A jest zbiorem ciągów z parzystą liczbą jedynek, zaś B jest zbiorem ciągów z nieparzystą liczbą jedynek. Nietrudno zauważyć, że spełnione są także dwa pozostałe warunki (R2) i (R3), co dowodzi, że zbiory A i B mają tyle samo elementów.

Uwaga

W dalszym ciągu (zadanie 29) wykażemy, że istnieje 2^n ciągów zerojedynkowych długości n. Stąd wynika, że oba zbiory A i B mają po 2^{14} elementów.

Zadanie 3.

Udowodnij, że liczba ciągów zerojedynkowych długości 16, w których występuje parzysta liczba jedynek, jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości 16, w których występuje nieparzysta liczba jedynek.

Rozwiązanie

Metoda łączenia w pary, opisana w rozwiązaniu poprzedniego zadania, nie działa. Jeśli bowiem tym razem w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{16})$, w którym występuje parzysta liczba jedynek, zastąpimy zera jedynkami i jedynki zerami, to otrzymamy ciąg, w którym także występuje parzysta liczba jedynek. Potrzebny jest więc inny sposób łączenia w pary. Ten nowy sposób polega na tym, by tylko na ostatnim miejscu zastąpić zero jedynką, a jedynkę zerem. Zatem ciąg $(a_1, \ldots, a_{15}, a_{16})$ łączymy w parę z ciągiem $(a_1, \ldots, a_{15}, 1 - a_{16})$. To znaczy, że:

- ciąg $(a_1,\ldots,a_{15},0)$ łączymy w parę z ciągiem $(a_1,\ldots,a_{15},1)$,
- ciąg $(a_1,\ldots,a_{15},1)$ łączymy w parę z ciągiem $(a_1,\ldots,a_{15},0)$.

Na przykład, ciąg 0110001001110001 łączymy w parę z ciągiem 0110001001110000. Sprawdzenie, że spełnione są warunki (R1), (R2) i (R3) opisane w zasadzie równoliczności, pozostawię jako ćwiczenie.

Uwaga

Zauważmy, że sposób łączenia w pary opisany w tym rozwiązaniu jest dobry dla ciągów dowolnej długości. Stąd wynika, że dla każdego n istnieje 2^{n-1} ciągów zerojedynkowych długości n, w których występuje parzysta liczba jedynek i tyle samo ciągów, w których występuje nieparzysta liczba jedynek.

Zadanie 4.

Udowodnij, że liczba ciągów zerojedynkowych długości 15, w których występuje więcej jedynek niż zer, jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości 15, w których występuje więcej zer niż jedynek.

Rozwiązanie

Sposób łączenia w pary opisany w rozwiązaniu zadania 1 jest dobry.

Uwaga

W uwadze po zadaniu 2 wspomniałem, że istnieje 2^n ciągów zerojedynkowych długości n. Wynika stąd, że jeśli liczba n jest nieparzysta, to istnieje 2^{n-1} ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest więcej jedynek niż zer i tyle samo ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest więcej zer niż jedynek. Oczywiście, jeśli n jest liczbą parzystą, to także liczba ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest więcej jedynek niż zer, jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest więcej zer niż jedynek. W tym przypadku nie możemy jednak twierdzić, że w obu tych zbiorach znajduje się po 2^{n-1} ciągów, gdyż istnieją ciągi, w których jest tyle samo jedynek i zer. Dopóki nie dowiemy się, ile jest tych ostatnich ciągów, nie będziemy mogli obliczyć, ile elementów ma zbiór ciągów, w których jest więcej jedynek i zbiór ciągów, w których jest więcej zer.

Zadanie 5.

Niech $n \geqslant 6$. Rozważamy zbiór S ciągów $(a_1,\ldots,a_n)$, których wyrazy należą do zbioru $\{0,1,\ldots,9\}$. Można powiedzieć, że elementami zbioru S są liczby mające co najwyżej n cyfr; z tym tylko, że jeśli liczba ma mniej niż n cyfr, to jej zapis dziesiętny jest uzupełniany na początku odpowiednią liczbą zer. Teraz w zbiorze S wyróżniamy dwa podzbiory. Zbiór A składa się z tych ciągów, w których każda liczba parzysta (tzn. 0, 2, 4, 6 i 8) występuje dokładnie jeden raz, pozostałe wyrazy ciągu są natomiast liczbami nieparzystymi. Zbiór B składa się natomiast z tych ciągów, w których każda liczba nieparzysta (tzn. 1, 3, 5, 7 i 9) występuje dokładnie jeden raz, pozostałe wyrazy ciągu są zaś liczbami parzystymi. Udowodnij, że zbiory A i B mają tyle samo elementów, tzn. $|A| = |B|$.

Rozwiązanie

Ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ należący do zbioru A łączymy w parę z ciągiem $(b_1, \ldots, b_n)$ zdefiniowanym w następujący sposób:

- jeśli a_i jest liczbą parzystą, to $b_i = a_i + 1$,
- jeśli a_i jest liczbą nieparzystą, to $b_i = a_i - 1$.

Popatrzmy na kilka przykładów. Niech $n = 8$. Wówczas:

- ciąg 10386524 łączymy w parę z ciągiem 01297435,
- ciąg 02468111 łączymy w parę z ciągiem 13579000,
- ciąg 97586420 łączymy w parę z ciągiem 86497531.

Sprawdzenie, że ten sposób łączenia w pary jest dobry, pozostawię jako ćwiczenie.

Symbolem $P(A)$ oznaczam zbiór wszystkich podzbiorów zbioru skończonego A, symbolem $P_k(A)$ oznaczam zbiór wszystkich podzbiorów k-elementowych zbioru A:

$$P(A) = \{X\colon\ X \subseteq A\}, \qquad P_k(A) = \{X \in P(A)\colon\ |X| = k\}.$$

Ponadto będę używał oznaczeń:

$$P(n) = P([n]), \qquad P_k(n) = P_k([n]).$$

Zadanie 6.

Udowodnij, że jeśli $0 \leqslant k \leqslant n$, to $|S_k(n)| = |P_k(n)|$. Ogólnie, jeśli zbiór A ma n elementów, to $|S_k(n)| = |P_k(A)|$.

Rozwiązanie

Ciąg zerojedynkowy $(a_1, \ldots, a_n)$ łączymy w parę ze zbiorem tych miejsc, na których w tym ciągu stoi jedynka. Formalnie: ten ciąg łączymy ze zbiorem $\{i \in [n]\colon\ a_i = 1\}$. Na przykład, jeśli $n = 8$, to:

- dla $k = 3$ ciąg 01100010 łączymy w parę ze zbiorem $\{2, 3, 7\}$,
- dla $k = 0$ ciąg 00000000 łączymy w parę ze zbiorem pustym,
- dla $k = 8$ ciąg 11111111 łączymy w parę ze zbiorem $[8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

W przypadku dowolnego zbioru A zaczynamy od ponumerowania elementów tego zbioru:

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Następnie ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ łączymy w parę ze zbiorem $\{x_i \in A\colon\ a_i = 1\}$.

Uwaga

Nietrudno dostrzec, że w przypadku, gdy rozważamy podzbiory zbioru $[n]$, ciąg zerojedynkowy jest funkcją charakterystyczną podzbioru, w którym jest w parze. Oczywiście to jest uwaga dla nauczycieli; uczniom nie mówię nic o funkcjach charakterystycznych. Tłumaczę im natomiast udowodnioną odpowiedniość w następujący sposób.

Dany jest zbiór A mający n elementów; ponumerujmy je: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Każdemu podzbiorowi zbioru A odpowiada wówczas pewien ciąg zerojedynkowy. Nadajmy elementom zbioru A jakąś interpretację: niech nasz zbiór A będzie zbiorem n osób, na przykład uczniów danej klasy. Chcemy wybrać pewną liczbę osób (być może nikogo lub nawet wszystkich) do nagrody. Na ile sposobów możemy to zrobić? Otóż przyglądamy się kolejno tym osobom i co do każdej podejmujemy jedną z dwóch decyzji: „tak” lub „nie”. Jeśli tak, to piszemy jedynkę; w przeciwnym przypadku piszemy zero. Tworzymy w ten sposób pewien ciąg zerojedynkowy długości n. Każdemu sposobowi wyboru osób do nagrody (czyli każdemu podzbiorowi zbioru A) odpowiada jeden ciąg zerojedynkowy długości n i na odwrót; ponadto różnym podzbiorom odpowiadają różne ciągi. A więc tych sposobów wyboru osób do nagrody (czyli podzbiorów zbioru A) jest tyle, ile ciągów zerojedynkowych. W podobny sposób można przekonać uczniów, że podzbiorów k-elementowych jest tyle, ile ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek, a więc $|S_k(n)|$.

Uczniowie często mają trudności ze zrozumieniem pojęcia podzbioru. Powyższa interpretacja pomaga im to pojęcie zrozumieć: mamy całą klasę i niektórych uczniów chcemy nagrodzić; uczniowie nagrodzeni tworzą podzbiór zbioru wszystkich uczniów. W szczególności uczniowie łatwiej rozumieją, co to jest zbiór pusty. Na ogół sprawia im kłopot to, że zbiór pusty także pochodzi z pewnego wyboru. Zastanawiają się, co to znaczy, że istnieje tylko jeden sposób wyboru podzbioru pustego. Interpretacja za pomocą ciągu decyzji pomaga: ciąg pusty powstaje z ciągu decyzji indywidualnych, tak samo jak każdy inny podzbiór.

Zadanie 7.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z par (i,j) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Udowodnij, że wówczas $|A| = |S_2(n)|$.

Rozwiązanie

Parę (i,j) łączymy z ciągiem zerojedynkowym długości n, w którym na miejscach i-tym i j-ym stoją jedynki, a na pozostałych miejscach stoją zera. Niech na przykład $n = 8$. Wówczas:

- parę $(3,7)$ łączymy z ciągiem 00100010,
- parę $(1,8)$ łączymy z ciągiem 10000001,
- parę $(7,8)$ łączymy z ciągiem 00000011.

Sprawdzenie, że ten sposób łączenia w pary spełnia warunki (R1), (R2) i (R3), pozostawię jako ćwiczenie.

Zadanie 8.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 3$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z ciągów (i,j,k) takich, że $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Udowodnij, że wówczas $|A| = |S_3(n)|$.

Rozwiązanie

Postępujemy tak jak w zadaniu 7. Trójkę (i,j,k) łączymy w parę z ciągiem zerojedynkowym długości n, w którym stoją 3 jedynki (na miejscach i-tym, j-ym i k-tym) oraz $n-3$ zer (na pozostałych miejscach). Niech na przykład $n=8$. Wówczas:

- trójkę $(2,3,4)$ łączymy w parę z ciągiem 01110000,
- trójkę $(2,5,7)$ łączymy w parę z ciągiem 01001010,
- trójkę $(1,5,8)$ łączymy w parę z ciągiem 10001001.

Sprawdzenie, że ten sposób łączenia w pary spełnia warunki (R1), (R2) i (R3), pozostawię jako ćwiczenie.

Zadanie 9.

Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1 \leqslant k \leqslant n$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z ciągów $(a_1,\ldots,a_k)$ takich, że $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_k \leqslant n$.

Udowodnij, że wówczas $|A| = |S_k(n)|$.

Rozwiązanie

To zadanie jest uogólnieniem zadań 7 i 8. Ciąg rosnący $(a_1,\ldots,a_k)$ łączymy w parę z ciągiem zerojedynkowym długości n, w którym występuje dokładnie k jedynek (na miejscach o numerach $a_1,\ldots,a_k$) i $n-k$ zer (na pozostałych miejscach). Niech na przykład $n=8$ i $k=5$. Wówczas:

- ciąg $(1,2,3,4,5)$ łączymy w parę z ciągiem 11111000,
- ciąg $(2,3,4,6,7)$ łączymy w parę z ciągiem 01110110,
- ciąg $(1,3,4,6,8)$ łączymy w parę z ciągiem 10110101.

Sprawdzenie warunków (R1), (R2) i (R3) pozostawię jako ćwiczenie. Zatem $|A| = |S_k(n)|$.

Zadanie 10.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z par (i,j) takich, że $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

Udowodnij, że wówczas $|A| = |S_2(n+1)|$.

Rozwiązanie

Pokażę dwa sposoby rozwiązania zadania. W sposobie pierwszym najpierw definiujemy pomocniczy zbiór B w następujący sposób:

- zbiór B składa się z par (i,j) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$.

Wówczas parę (i,j) należącą do zbioru A łączymy z parą $(i,j+1)$ należącą do zbioru B. Niech na przykład $n=8$. Wówczas:

- parę $(2,6)$ łączymy z parą $(2,7)$,
- parę $(5,5)$ łączymy z parą $(5,6)$,
- parę $(1,8)$ łączymy z parą $(1,9)$.

Sprawdzenie, że ten sposób łączenia w pary par należących do zbiorów A i B spełnia warunki

(R1), (R2) i (R3), pozostawię jako ćwiczenie. Zatem $|A|=|B|$. To, że $|B|=|S_2(n+1)|$, wynika z zadania 7.

W sposobie drugim pokażę bezpośredni sposób łączenia w pary par ze zbioru A z ciągami zerojedynkowymi długości $n+1$ zawierającymi dokładnie dwie jedynki. Zacznijmy od wypisania $n-1$ zer i ponumerowania miejsc między nimi (łącznie z miejscem przed pierwszym zerem i po ostatnim zerze):

$$_1\ 0\ _2\ 0\ _3\ 0\ _4\ 0\ _5\ \ldots\ _{n-2}\ 0\ _{n-1}\ 0\ _n$$

Napisane zera stały się w ten sposób granicami między miejscami ponumerowanymi liczbami od 1 do n. Niech teraz dana będzie para (i,j) ze zbioru A. Jeśli $i<j$, to w miejscach o numerach i oraz j wpisujemy jedynki; jeśli $i=j$, to w miejsce o numerze i wpisujemy obok siebie dwie jedynki. W ten sposób otrzymamy ciąg zerojedynkowy składający się z $n-1$ zer i 2 jedynek; łącznie ma on zatem długość $n+1$ i ma dokładnie dwie jedynki. A więc otrzymany ciąg zerojedynkowy należy do zbioru $S_2(n+1)$. Popatrzmy na przykład ilustrujący ten sposób łączenia w pary. Niech $n=8$. Napisaliśmy zatem 7 zer, oddzielających 8 ponumerowanych miejsc:

$$_1\ 0\ _2\ 0\ _3\ 0\ _4\ 0\ _5\ 0\ _6\ 0\ _7\ 0\ _8$$

Teraz:

- parę $(3,7)$ łączymy z ciągiem, w którym jedynki wpisujemy w miejsca o numerach 3 i 7 czyli z ciągiem 001000010,
- parę $(1,8)$ łączymy z ciągiem 100000001,
- parę $(6,6)$ łączymy z ciągiem 000001100.

Sprawdzenie, że taki sposób łączenia w pary spełnia warunki (R1), (R2) i (R3), pozostawię jako ćwiczenie. Zatem $|A|=|S_2(n+1)|$.

Zadanie 11.

Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z ciągów (i,j,k) takich, że $1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n$.

Udowodnij, że wówczas $|A|=|S_3(n+2)|$.

Rozwiązanie

Postępujemy tak samo jak w zadaniu 10. Mamy dwa sposoby rozwiązania zadania. W sposobie pierwszym definiujemy pomocniczy zbiór B w następujący sposób:

- zbiór B składa się z trójek (i,j) takich, że $1\leqslant i<j<k\leqslant n+2$.

Wówczas trójkę (i,j,k) należącą do zbioru A łączymy w parę z trójką $(i,j+1,k+2)$ należącą do zbioru B. Niech na przykład $n=8$. Wówczas:

- trójkę $(2,4,6)$ łączymy w parę z trójką $(2,5,8)$,
- trójkę $(5,5,7)$ łączymy w parę z trójką $(5,6,9)$,
- trójkę $(5,5,5)$ łączymy w parę z trójką $(5,6,7)$,
- trójkę $(1,3,8)$ łączymy w parę z trójką $(1,4,10)$.

Sprawdzenie, że ten sposób łączenia w pary trójek należących do zbiorów A i B spełnia warunki (R1), (R2) i (R3), pozostawię jako ćwiczenie. Zatem $|A|=|B|$. To, że $|B|=|S_3(n+2)|$, wynika z zadania 8.

W drugim sposobie rozwiązania znów piszemy $n-1$ zer i numerujemy liczbami od 1 do n miejsca rozdzielone tymi zerami. Następnie, trójkę (i,j,k) łączymy w parę z ciągiem zero-jedynkowym, w którym oprócz wypisanych $n-1$ zer mamy 3 jedynki wpisane w miejscach o numerach i, j i k. Oczywiście, jeśli któreś liczby w rozważanej trójce są równe, to w miejsce o tym numerze wpisujemy obok siebie odpowiednią liczbę jedynek. Popatrzmy znów na przykład. Niech nadal $n=8$. Znów mamy 7 zer i 8 ponumerowanych miejsc. Wówczas:

- trójkę $(2,3,8)$ łączymy z ciągiem 0101000001,
- trójkę $(3,3,5)$ łączymy z ciągiem 0011001000,
- trójkę $(6,6,6)$ łączymy z ciągiem 0000011100.

Sprawdzenie, że taki sposób łączenia w pary spełnia warunki (R1), (R2) i (R3), pozostawię jako ćwiczenie. Zatem $|A|=|S_2(n+1)|$.

Zadanie 12.

Dane są dwie liczby naturalne k i n takie, że $k,n\geqslant 1$. Definiujemy następujące dwa zbiory ciągów:

- zbiór A składa się z ciągów $(a_1,\ldots,a_k)$ takich, że $1\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_k\leqslant n$,
- zbiór B składa się z ciągów $(b_1,\ldots,b_k)$ takich, że $1\leqslant b_1<\ldots<b_k\leqslant n+k-1$.

Udowodnij, że $|A|=|B|$.

Rozwiązanie

Weźmy ciąg $(a_1,\ldots,a_k)$ taki, że $1\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_k\leqslant n$. Łączymy go w parę z ciągiem $(b_1,\ldots,b_k)$ zdefiniowanym w następujący sposób:

$$\begin{aligned} &b_1=a_1,\\ &b_2=a_2+1,\\ &b_3=a_3+2,\\ &\ldots\quad\ldots\\ &b_k=a_k+k-1. \end{aligned}$$

Nietrudno sprawdzić, że wtedy $1\leqslant b_1<\ldots<b_k\leqslant n+k-1$. Zatem ciąg $(b_1,\ldots,b_k)$ należy do zbioru B.

Popatrzmy na kilka przykładów. Niech $k=4$ i $n=7$. Wówczas:

- ciąg $(1,2,2,4)$ łączymy w parę z ciągiem $(1,3,4,7)$,
- ciąg $(2,5,7,7)$ łączymy w parę z ciągiem $(2,6,9,10)$,
- ciąg $(7,7,7,7)$ łączymy w parę z ciągiem $(7,8,9,10)$.

Oczywiście możliwe jest, by $k>n$. Niech na przykład $n=5$ oraz $k=7$. Wówczas:

- ciąg $(1,1,1,1,1,1,1)$ łączymy w parę z ciągiem $(1,2,3,4,5,6,7)$,

- ciąg $(2,2,2,2,3,4,5)$ łączymy w parę z ciągiem $(2,3,4,5,7,9,11)$,
- ciąg $(1,1,1,3,5,5,5)$ łączymy w parę z ciągiem $(1,2,3,6,9,10,11)$.

Sprawdzenie, że każdy ciąg ze zbiorów A i B znajduje się w dokładnie jednej parze, a więc spełnione są warunki (R1), (R2) i (R3), jest bardzo łatwe i zostawię to jako ćwiczenie. Zatem $|A|=|B|$.

Zadanie 13.

Dane są liczby naturalne k i n takie, że $k,n \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z ciągów $(a_1,\ldots,a_k)$ takich, że $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n$.

Udowodnij, że wówczas $|A|=|S_k(n+k-1)|$.

Rozwiązanie

Mamy dwa sposoby rozwiązania zadania. W sposobie pierwszym definiujemy pomocniczy zbiór B, tak jak w zadaniu 12. Wówczas z zadania 12 wynika, że $|A|=|B|$ i z zadania 9 wynika, że $|B|=|S_k(n+k-1)|$.

Drugi sposób rozwiązania zadania polega na uogólnieniu rozumowania pokazanego w rozwiązaniach zadań 10 i 11. Mamy znów $n-1$ zer rozdzielających n ponumerowanych miejsc. Ciąg $(a_1,\ldots,a_k)$ łączymy w parę z ciągiem zerojedynkowym utworzonym w ten sposób, że w miejsca o numerach $a_1,\ldots,a_k$ wpisujemy jedynkę; w przypadku, gdy któreś wyrazy rozpatrywanego ciągu są równe, to w miejsce o tym numerze wpisujemy obok siebie odpowiednią liczbę jedynek. Szczegóły pozostawię jako ćwiczenie.

5.3. Reguła dodawania

Drugą z zasad kombinatorycznych wspomnianych w rozdziale 5.1. jest reguła dodawania.

Reguła dodawania. Przypuśćmy, że możemy wykonać dwie czynności. Pierwsza z nich kończy się jednym z m wyników, druga kończy się jednym z n wyników. Żaden z wyników pierwszej czynności nie jest jednocześnie wynikiem drugiej czynności. Załóżmy następnie, że wykonujemy jedną z tych dwóch czynności. Otrzymamy wówczas jeden z $m+n$ wyników.

Reguła dodawania mówi, że jeśli zbiory A i B są rozłączne, to

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Regułę dodawania można rozszerzyć na większą liczbę czynności. Dokładne sformułowanie takiej rozszerzonej reguły dodawania pozostawię jako ćwiczenie.

Z reguły dodawania wynika poprawność ważnego sposobu zliczania elementów zbioru. Przypuśćmy, że mamy dane dwa zbiory A i B takie, że $A \subseteq B$. Chcemy policzyć, ile elementów ma zbiór A. Jedna z metod polega na tym, by policzyć wszystkie elementy zbioru B, następnie policzyć te elementy zbioru B, które do zbioru A nie należą i wreszcie otrzymane liczby odjąć. Wzorami można to zapisać w postaci

$$|A| = |B| - |B \setminus A|.$$

Z reguły dodawania wynika bowiem, że

$$|A|+|B\setminus A|=|A\cup(B\setminus A)|=|B|.$$

Mówiąc obrazowo, zliczamy wszystkie możliwe elementy (tzn. wszystkie elementy zbioru B), a następnie zliczamy, ile wśród nich jest elementów „złych", to znaczy elementów nienależących do zbioru A. Wtedy od liczby wszystkich elementów odejmujemy liczbę elementów złych.

Ten sposób zliczania zastosujemy teraz do wyprowadzenia ważnego wniosku. Wykażemy mianowicie, że jeśli $m<n$, to

$$|\{m,m+1,\ldots,n\}|=n-m+1.$$

Niech bowiem $A=\{m,m+1,\ldots,n\}$ oraz $B=[n]$. Wówczas $B\setminus A=[m-1]$, skąd wynika, że

$$|A|=|B|-|B\setminus A|=|[n]|-|[m-1]|=n-(m-1)=n-m+1.$$

Częsty błąd uczniów polega na tym, że piszą, iż $|A|=n-m$.

Ten sposób zliczania elementów zbioru jest tak oczywisty, że często nawet nie zauważamy, iż została w nim wykorzystana reguła dodawania. Na przykład, korzystaliśmy z niego kilkakrotnie w rozdziale 5.2.

Z reguły dodawania łatwo wynikają dwa ważne wzory (są to szczególne przypadki tzw. zasady włączeń i wyłączeń):

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

oraz

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Podobny wzór można napisać także w przypadku większej liczby zbiorów (ze wzoru na liczbę elementów sumy 4 zbiorów skorzystam w jednym z dalszych zadań; wzór na liczbę elementów sumy 5 zbiorów był wykorzystywany w zadaniu 4 z zawodów I stopnia XLVI Olimpiady Matematycznej). Popatrzmy teraz na kilka zadań, w których można zastosować regułę dodawania.

Zadanie 14.

Na ile sposobów można wybrać przedstawiciela parlamentu, którym ma być poseł lub senator? Dla przypomnienia: Sejm składa się z 460 posłów, Senat ze 100 senatorów i żaden senator nie może jednocześnie być posłem.

Rozwiązanie

Możemy wykonać dwie czynności: pierwsza czynność polega na wybraniu posła, druga czynność polega na wybraniu senatora. Pierwsza czynność kończy się jednym z 460 wyników, druga kończy się jednym ze 100 wyników. Żaden wynik jednej czynności nie jest wynikiem drugiej. Teraz wykonujemy jedną z tych dwóch czynności. Mamy zatem 560 możliwych wyników i tyle jest sposobów wybrania przedstawiciela.

Zadanie 15.

W klasie liczącej 30 uczniów wielu uczniów gra w brydża lub szachy (lub w obie gry razem). W brydża gra 23 uczniów, w szachy 14 uczniów, w obie gry razem gra 9 uczniów. Ilu uczniów nie gra w żadną z tych gier?

Rozwiązanie

Zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń. Niech B oznacza zbiór uczniów grających w brydża i niech S oznacza zbiór uczniów grających w szachy. Mamy zatem:

$$|B \cup S| = |B| + |S| - |B \cap S|.$$

Wiemy, że $|B| = 23$, $|S| = 14$ oraz $|B \cap S| = 9$. Zatem

$$|B \cup S| = 23 + 14 - 9 = 28,$$

skąd wynika, że w żadną z tych gier nie gra dwóch uczniów.

Zadanie 16.

W klasie liczącej 30 uczniów każdy uczeń gra w brydża lub szachy (lub w obie gry razem). W brydża gra 19 uczniów, w szachy 14 uczniów. Ilu uczniów gra w obie gry?

Rozwiązanie

Zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń. Niech B oznacza zbiór uczniów grających w brydża i niech S oznacza zbiór uczniów grających w szachy. Mamy zatem:

$$|B \cup S| = |B| + |S| - |B \cap S|.$$

Z założenia wiemy, że $|B \cup S| = 30$, bo każdy uczeń gra w którąś z tych gier. Ponadto $|B| = 19$ oraz $|S| = 14$. Zatem

$$30 = 19 + 14 - |B \cap S|,$$

skąd wynika, że $|B \cap S| = 3$. Zatem w obie gry gra trzech uczniów.

Zadanie 17.

W klasie liczącej 30 uczniów wielu uczniów gra w brydża, szachy lub warcaby. W brydża gra 16 uczniów, w szachy gra 13 uczniów, w warcaby gra 10 uczniów. Jednocześnie w brydża i szachy gra 7 uczniów, w brydża i warcaby gra 5 uczniów, w szachy i warcaby gra 4 uczniów. Wreszcie 3 uczniów gra we wszystkie trzy gry. Ilu uczniów nie gra w żadną z tych trzech gier?

Rozwiązanie

Tym razem zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów. Przy naturalnych oznaczeniach zbiorów mamy:

$$|B\cup S\cup W| = |B|+|S|+|W|-|B\cap S|-|B\cap W|-|S\cap W|+|B\cap S\cap W| =$$
$$= 16+13+10-7-5-4+3 = 39-16+3 = 26.$$

Stąd wynika, że 4 uczniów nie gra w żadną z tych trzech gier.

Zadanie 18.

W klasie liczącej 30 uczniów wielu uczniów gra w brydża, szachy lub warcaby. W brydża gra 17 uczniów, w szachy gra 13 uczniów, w warcaby gra 11 uczniów. Jednocześnie w brydża i szachy gra 6 uczniów, w brydża i warcaby gra 7 uczniów, w szachy i warcaby gra 5 uczniów. Wreszcie 3 uczniów nie gra w żadną z tych trzech gier. Ilu uczniów gra we wszystkie trzy gry?

Rozwiązanie

Jeszcze raz zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów. Przy naturalnych oznaczeniach zbiorów mamy:

$$|B\cup S\cup W| = |B|+|S|+|W|-|B\cap S|-|B\cap W|-|S\cap W|+|B\cap S\cap W| =$$
$$= 17+13+11-6-7-5+|B\cap S\cap W| = 41-18+|B\cap S\cap W| =$$
$$= 23+|B\cap S\cap W|.$$

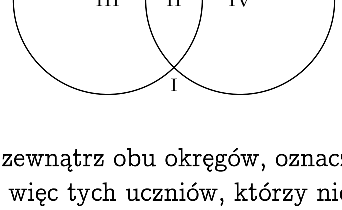
Ponieważ 3 uczniów nie gra w żadną z tych trzech gier, więc $|B\cup S\cup W| = 27$. Stąd dostajemy

$$|B\cap S\cap W| = |B\cup S\cup W| - 23 = 27-23 = 4,$$

a więc we wszystkie trzy gry gra czterech uczniów.

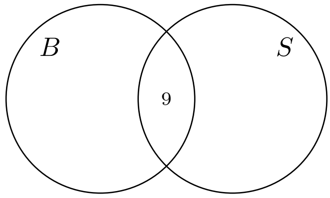
Zadania 15, 16, 17 i 18 możemy łatwo rozwiązać graficznie, wykorzystując tzw. diagramy Venna. Najpierw popatrzmy na rozwiązanie zadania 15.

Rysujemy dwa okręgi przedstawiające zbiory B i S. Musimy zadbać o to, by te okręgi się przecinały. Dzielą one wtedy płaszczyznę na 4 obszary; nazywamy je składowymi. Na poniższym rysunku są one ponumerowane liczbami rzymskimi I, II, III i IV:

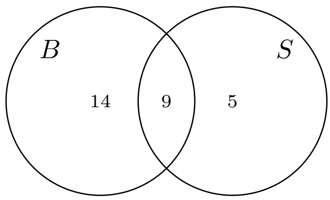


Obszar o numerze I, leżący na zewnątrz obu okręgów, oznacza te elementy, które nie należą do żadnego ze zbiorów B i S, a więc tych uczniów, którzy nie grają w żadną grę (w zadaniu

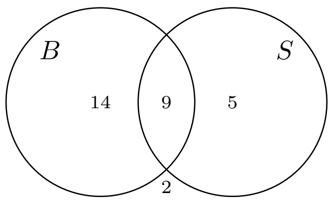
15 mamy właśnie dowiedzieć się, ile ta część ma elementów). Obszar o numerze II, leżący wewnątrz obu okręgów, oznacza te elementy, które należą do obu zbiorów jednocześnie, a więc tych uczniów, którzy grają w obie gry razem (w zadaniu 15 mamy w tej części 9 elementów). Zatem w rozwiązaniu zadania 15 w ten obszar wpisujemy liczbę 9:



Obszar o numerze III, zawarty wewnątrz lewego okręgu i na zewnątrz prawego, oznacza te elementy, które należą do zbioru B i nie należą do zbioru S. W zadaniu 15 oznacza on tych uczniów, którzy grają w brydża i nie grają w szachy; jest 14 takich uczniów. Podobnie w obszarze IV mamy 5 uczniów, którzy grają w szachy i nie grają w brydża. Te liczby wpisujemy w obszary III i IV:

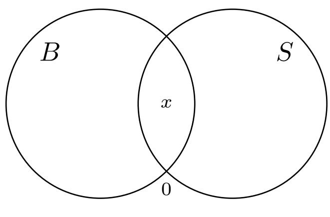


W trzy obszary wpisaliśmy liczby o sumie 28. Zatem w czwartym obszarze ma być liczba 2:

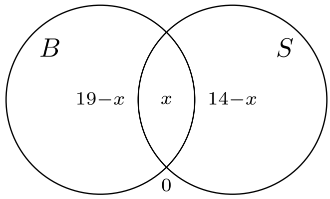


To znaczy, że dwóch uczniów nie gra w żadną z tych gier.

W zadaniu 16 zaczynamy od wpisania liczby 0 w obszar o numerze I i wpisania x w obszar o numerze II.



Teraz w obszar o numerze III wpisujemy $19-x$, a w obszar o numerze IV wpisujemy $14-x$:

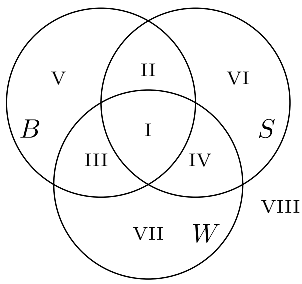


Teraz mamy równanie

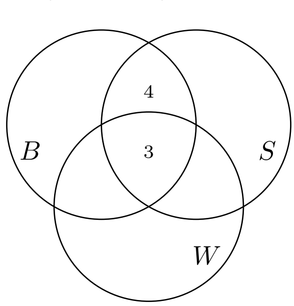
$$(19-x)+(14-x)+x+0=30,$$

skąd łatwo dostajemy $x=3$. Zatem trzech uczniów gra w obie gry.

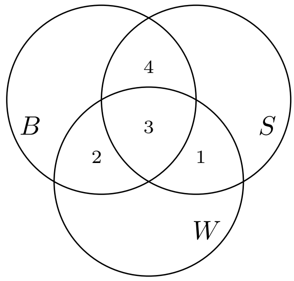
W zadaniu 17 rozważamy trzy zbiory: zbiór B uczniów grających w brydża, zbiór S uczniów grających w szachy i zbiór W uczniów grających w warcaby. Dla zilustrowania tych trzech zbiorów rysujemy na płaszczyźnie trzy okręgi, dbając jedynie o to, by były w tzw. położeniu ogólnym, tzn. by dzieliły płaszczyznę na 8 obszarów (ponumerowanych liczbami rzymskimi od I do VIII na poniższym rysunku):



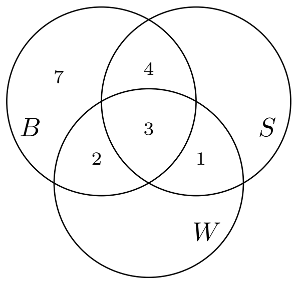
Te obszary także nazywamy składowymi. A więc okręgi należy narysować tak, by wszystkie składowe były niepuste. Następnie w każdy obszar wpisujemy liczbę oznaczającą, ile elementów ma zbiór odpowiadający temu obszarowi. Obszary te zapełniamy w kolejności numerów wpisanych w nie na ostatnim rysunku; zaczynamy więc od obszaru oznaczonego liczbą I. W ten obszar, odpowiadający części wspólnej $B\cap S\cap W$, wpisujemy liczbę 3, bo 3 uczniów gra we wszystkie trzy gry. Następnie w obszar z numerem II wpisujemy liczbę 4. Wiemy bowiem, że 7 uczniów gra w brydża i w szachy, a 3 z nich już uwzględniliśmy w obszarze I (inaczej mówiąc: 3 z nich gra ponadto w warcaby, a więc zostaje 4, którzy grają tylko w brydża i szachy). Mamy zatem rysunek:



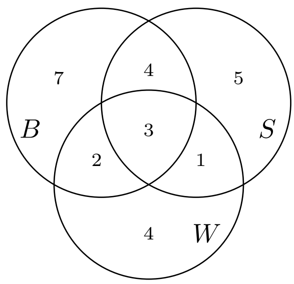
W podobny sposób wpisujemy liczby 2 i 1 w obszary o numerach III i IV:



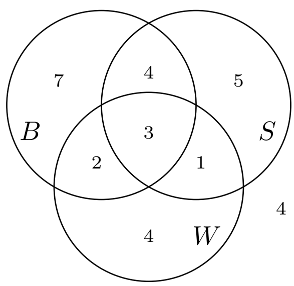
Następnie w obszar o numerze V wpisujemy liczbę 7. Mianowicie w brydża gra 16 uczniów, a 9 z nich zostało już uwzględnionych (3 w obszarze I, 4 w obszarze II i 2 w obszarze III). Otrzymujemy rysunek:



W podobny sposób wpisujemy liczby 5 i 4 w obszary VI i VII:



W 7 obszarów wpisaliśmy liczby o sumie równej 26. Ponieważ w klasie jest 30 uczniów, więc w obszar o numerze VIII wpisujemy liczbę 4 i w ten sposób nasz rysunek jest kompletny:

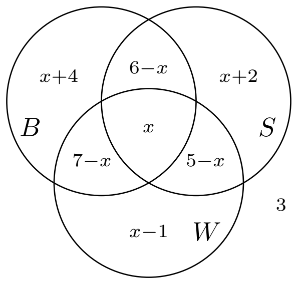


Liczba 4 w obszarze ósmym daje odpowiedź w zadaniu 17, mianowicie 4 uczniów nie gra w żadną z tych trzech gier.

W podobny sposób rozwiązujemy zadanie 18. Znów wpisujemy liczby w obszary w kolejności numerów. Jest jednak pewna różnica: tak jak w zadaniu 16, nie wiemy, ilu uczniów gra we wszystkie gry. Jest to bowiem niewiadoma, którą musimy znaleźć. W obszar o numerze I wpisujemy zatem niewiadomą x. W obszary II, III i IV wpisujemy teraz odpowiednio $6-x$, $7-x$ i $5-x$. W obszar V musimy wpisać teraz

$$17-(6-x)-(7-x)-x=x+4.$$

W podobny sposób w obszar VI wpiszemy $x+2$ i w obszar VII wpiszemy $x-1$. Wreszcie w obszar VIII wpisujemy 3, bo 3 uczniów nie gra w żadną grę. Mamy zatem rysunek:



Ponieważ w klasie jest 30 uczniów, więc po dodaniu wszystkich liczb wpisanych w 8 obszarów otrzymujemy równanie

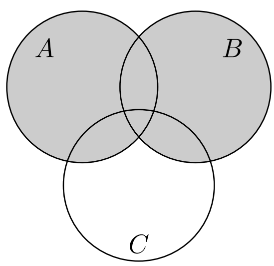
$$x+(6-x)+(7-x)+(5-x)+(x+4)+(x+2)+(x-1)+3=30,$$

którego rozwiązaniem jest $x=4$. Zatem we wszystkie trzy gry jednocześnie gra 4 uczniów.

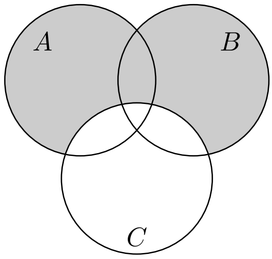
Uważam, że rozwiązanie graficzne korzystające z diagramów Venna jest dla uczniów bardziej naturalne. Zauważmy, że powyżej nie podałem dowodów obu wzorów włączeń i wyłączeń. Nie jest to przypadek. Istnieją dowody czysto kombinatoryczne, jednak moje doświadczenie pokazuje, że większość uczniów ma trudności ze zrozumieniem ich. Można też pokazać dowody wykorzystujące kilka prostych równości z rachunku zbiorów. Powstaje jednak wtedy problem, w jaki sposób możemy w szkole dowodzić tożsamości rachunku zbiorów. Sądzę, że najprostszą metodą jest ilustrowanie takich tożsamości na diagramach Venna. Popatrzmy na przykładową tożsamość:

$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C).$$

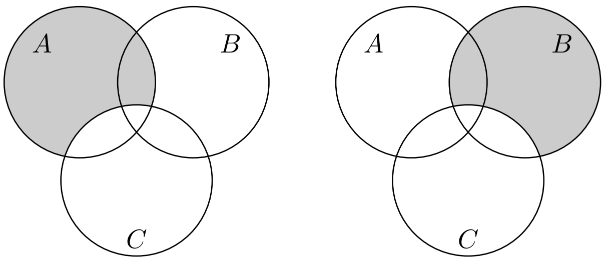
Zacieniujemy na diagramach Venna zbiory występujące po obu stronach równości. Zajmiemy się najpierw lewą stroną. Najpierw zacieniujemy zbiór $A\cup B$:



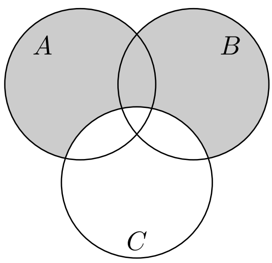
Następnie z zacieniowanego zbioru usuwamy tę część, która jest zawarta w zbiorze C. W ten sposób otrzymamy graficzną ilustrację zbioru $L=(A\cup B)\setminus C$, stojącego po lewej stronie naszej tożsamości:



Teraz zajmiemy się zbiorem po prawej stronie dowodzonej tożsamości. Zaczynamy od narysowania zbiorów $A\setminus C$ oraz $B\setminus C$. Oto one na następujących dwóch rysunkach (zbiór $A\setminus C$ na rysunku po lewej stronie oraz zbiór $B\setminus C$ na rysunku po prawej stronie):



Teraz widzimy, że suma tych zbiorów, czyli zbiór $P=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ jest zacieniowany w następujący sposób:



Zbiory L i P są zacieniowane tak samo, a więc są równe. To kończy dowód tożsamości.

Niektórzy nauczyciele protestują, że nie jest to dowód ogólny, a tylko ilustracja na jednym przykładzie. Otóż nie. Można udowodnić twierdzenie, które mówi, że jeśli jakaś tożsamość rachunku zbiorów (równość lub inkluzja) jest prawdziwa dla jednej tzw. niezależnej rodziny zbiorów (niezależność oznacza tu, że wszystkie składowe są niepuste), to jest prawdziwa dla dowolnej rodziny zbiorów. Skoro udowodniliśmy naszą tożsamość dla jednej niezależnej rodziny zbiorów $\{A,B,C\}$, to ta tożsamość jest też prawdziwa dla dowolnych zbiorów A, B i C. Tak więc ilustracja tożsamości za pomocą diagramów Venna jest w istocie dowodem. Jest to przy tym ten rodzaj dowodu, który polecałbym w szkole — o ile w ogóle musimy dowodzić jakiejkolwiek tożsamości rachunku zbiorów.

Jeśli jednak decydujemy się na użycie diagramów Venna, to nie widzę wielkiego sensu w tym, by najpierw użyć diagramów Venna do dowodu tych tożsamości, które są następnie potrzebne do dowodu zasady włączeń i wyłączeń, zamiast od razu użyć diagramów Venna do rozwiązania zadań kombinatorycznych. Zasada włączeń i wyłączeń jest oczywiście ważna w rachunku prawdopodobieństwa, ale wolałbym tylko podać ją uczniom, bez dowodu.

Na zakończenie rozdziału o regule dodawania popatrzmy jeszcze na kilka zadań dotyczących podzielności. W rozwiązaniach tych zadań skorzystamy z reguły dodawania oraz z zasady włączeń i wyłączeń. Oczywiście te zadania można także rozwiązać graficznie za pomocą diagramów Venna. Takie rozwiązania pozostawię jako ćwiczenie.

Zadanie 19.

Ile jest liczb od 1 do 1000 włącznie dających resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 7?

Rozwiązanie

Zauważmy, że $994 = 7 \cdot 142$ oraz $1001 = 7 \cdot 143$. Zatem wśród liczb od 1 do 1000 włącznie znajdują się 142 liczby podzielne przez 7 i 143 liczby dające resztę 1 przy dzieleniu przez 7. Liczb, o które chodzi w zadaniu, jest zatem $142 + 143 = 285$.

Zadanie 20.

Ile jest liczb od 1 do 1000 włącznie podzielnych przez 3 lub przez 5?

Rozwiązanie

W zbiorze liczb od 1 do 1000 włącznie wyróżnimy dwa podzbiory:

- zbiór A składa się z liczb podzielnych przez 3,
- zbiór B składa się z liczb podzielnych przez 5.

Wówczas — tak jak w zadaniu 1 — pokazujemy, że $|A| = 333$ (gdyż $1000 = 3 \cdot 333 + 1$) oraz $|B| = 200$ (bo $1000 = 5 \cdot 200$). Następnie zauważamy, że zbiór $A \cap B$ składa się z liczb podzielnych przez 15 (bo liczby 3 i 5 są względnie pierwsze). Zatem $|A \cap B| = 66$ (bo $1000 = 15 \cdot 66 + 10$). Stąd wynika, że

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 333 + 200 - 66 = 467.$$

Zadanie 21.

Ile jest liczb od 1 do 1000 włącznie podzielnych przez 3 i jednocześnie niepodzielnych przez 5?

Rozwiązanie

Niech zbiory A i B będą określone tak jak w poprzednim zadaniu. Wówczas $A \cap B \subseteq A$, skąd wynika, że

$$|A \setminus B| = |A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| = 333 - 66 = 267.$$

Zadanie 22.

Ile jest liczb od 1 do 1000 włącznie podzielnych przez 3, 5 lub 7?

Rozwiązanie

Tym razem wśród liczb od 1 do 1000 włącznie wyróżniamy trzy podzbiory:

- zbiór A składa się z liczb podzielnych przez 3,
- zbiór B składa się z liczb podzielnych przez 5,
- zbiór C składa się z liczb podzielnych przez 7.

Tak jak poprzednio, $|A|=333$, $|B|=200$ oraz $|A\cap B|=66$. Następnie $|C|=142$, $|A\cap C|=47$, $|B\cap C|=28$ oraz $|A\cap B\cap C|=9$. Zatem:

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cup B\cup C|=\\ &=333+200+142-66-47-28+9=675-141+9=543.\end{aligned}$$

5.4. Reguła mnożenia

Ostatnią z trzech zasad kombinatorycznych wspomnianych w rozdziale 5.1. jest reguła mnożenia.

Reguła mnożenia. Przypuśćmy, że możemy wykonać dwie czynności. Pierwsza z nich kończy się jednym z m wyników, druga — niezależnie od wyniku pierwszej czynności — kończy się jednym z n wyników. Załóżmy następnie, że wykonujemy obie czynności, najpierw pierwszą, a następnie drugą. Otrzymamy wówczas jeden z $m\cdot n$ wyników. Wynikiem wykonania obu tych czynności jest oczywiście para (a,b), gdzie a jest wynikiem pierwszej czynności i b jest wynikiem drugiej czynności.

Reguła mnożenia w najprostszej wersji, w której zbiór wyników drugiej czynności nie zależy od wyniku pierwszej czynności, mówi, że

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|.$$

W wersji ogólnej przypuśćmy, że A jest zbiorem wyników pierwszej czynności oraz dla każdego $a\in A$ zbiór B_a jest zbiorem tych wyników drugiej czynności, które mogą być uzyskane wtedy, gdy pierwsza czynność zakończy się wynikiem a. Reguła mnożenia mówi wówczas, że jeśli $|A|=m$ oraz $|B_a|=n$ dla każdego $a\in A$, to

$$|\{(a,b):\ a\in A \text{ oraz } b\in B_a\}|=m\cdot n.$$

Inaczej mówiąc, jeśli $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ oraz $|B_{a_1}|=\ldots=|B_{a_m}|=n$, to zbiór

$$\{(a_1,b):\ b\in B_{a_1}\}\cup\ldots\cup\{(a_m,b):\ b\in B_{a_m}\}$$

ma $m\cdot n$ elementów.

Regułę mnożenia można rozszerzyć na większą liczbę czynności. Dokładne sformułowanie takiej rozszerzonej reguły mnożenia pozostawię jako ćwiczenie.

W tym rozdziale zajmiemy się zadaniami, w których wykorzystamy sformułowaną powyżej regułę mnożenia. Niektóre z tych zadań można rozwiązać inaczej, nas jednak interesują rozwiązania ilustrujące sposób użycia reguły mnożenia.

Zadanie 23.

Na ile sposobów można wybrać delegację parlamentu, w skład której ma wchodzić jeden poseł i jeden senator? Dla przypomnienia: Sejm składa się z 460 posłów, Senat ze 100 senatorów i żaden senator nie może jednocześnie być posłem.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu tego zadania skorzystamy z reguły mnożenia. Zastosowanie reguły mnożenia będzie zazwyczaj polegało na pokazaniu, w jaki sposób za pomocą dobrze opisanych czynności można skonstruować wszystkie obiekty, które mamy zliczyć. Ze względów dydaktycznych bardzo pouczające jest wskazanie wyraźnie wszystkich tych czynności i zliczenie wyników każdej z nich.

W tym zadaniu delegację parlamentu wybieramy za pomocą dwóch czynności:

- pierwsza czynność polega na wybraniu jednego posła; ta czynność kończy się jednym z 460 wyników,
- druga czynność polega na wybraniu jednego senatora; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym ze 100 wyników.

Reguła mnożenia mówi teraz, że wykonanie obu tych czynności, jedna po drugiej, kończy się jednym z $460 \cdot 100 = 46000$ wyników. Tyle delegacji możemy utworzyć.

Zadanie 24.

Rzucamy kostką 2 razy, zapisując wyniki w kolejności rzutów. W ten sposób wynikiem doświadczenia jest para liczb od 1 do 6. Ile wyników tej postaci można uzyskać?

Rozwiązanie

Wykonujemy dwie czynności:

- pierwsza czynność polega na rzuceniu kostką pierwszy raz; ta czynność kończy się jednym z 6 wyników,
- druga czynność polega na rzuceniu kostką drugi raz; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, także kończy się jednym z 6 wyników.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $6 \cdot 6 = 36$ wyników.

Zadanie 25.

Rzucamy 5 razy kostką dwudziestościenną, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile wyników tej postaci możemy uzyskać?

Rozwiązanie

Wykonujemy pięć czynności:

• pierwsza czynność polega na rzuceniu kostką pierwszy raz; ta czynność kończy się jednym z 20 wyników,

• druga czynność polega na rzuceniu kostką drugi raz; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym z 20 wyników,

• trzecia czynność polega na rzuceniu kostką trzeci raz; ta czynność, niezależnie od wyników pierwszej i drugiej czynności, kończy się jednym z 20 wyników,

• czwarta czynność polega na rzuceniu kostką czwarty raz; ta czynność, niezależnie od wyników pierwszych trzech czynności, kończy się jednym z 20 wyników,

• piąta czynność polega na rzuceniu kostką piąty raz; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych czterech czynności, także kończy się jednym z 20 wyników.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^5 = 3200000$ wyników.

Zadanie 26.

Dana jest liczba naturalna $m \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

• zbiór A składa się z par (a, b) takich, że $1 \leqslant a, b \leqslant m$ (czyli, inaczej mówiąc, $a, b \in [m]$).

Udowodnij, że $|A| = m^2$.

Rozwiązanie

Wykonujemy dwie czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za drugim razem możemy ponownie wybrać dowolną liczbę, nawet jeśli ją już wybraliśmy za pierwszym razem.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $m \cdot m = m^2$ wyników.

Zadanie 27.

Dana jest liczba naturalna $m \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

• zbiór A składa się z trójek (a, b, c) takich, że $1 \leqslant a, b, c \leqslant m$ (czyli, inaczej mówiąc, $a, b, c \in [m]$).

Udowodnij, że $|A| = m^3$.

Rozwiązanie

Wykonujemy trzy czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za drugim razem możemy ponownie wybrać dowolną liczbę, nawet jeśli ją już wybraliśmy za pierwszym razem,

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych dwóch czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za trzecim razem możemy ponownie wybrać dowolną liczbę, nawet jeśli ją już wybraliśmy za pierwszym lub za drugim razem.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $m \cdot m \cdot m = m^3$ wyników.

Zadanie 28.

Dane są liczby naturalne n i m (takie, że $n, m \geqslant 1$). Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

• zbiór A składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ takich, że $1 \leqslant a_1, \ldots, a_n \leqslant m$ (czyli, inaczej mówiąc, $a_1, \ldots, a_n \in [m]$).

Udowodnij, że $|A| = m^n$.

Rozwiązanie

Wykonujemy n czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za drugim razem możemy ponownie wybrać dowolną liczbę, nawet jeśli ją już wybraliśmy za pierwszym razem,

• ...

• ostatnia, n-ta czynność polega na wybraniu n-tej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych $n-1$ czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za ostatnim razem możemy ponownie wybrać dowolną liczbę, nawet jeśli ją już wybraliśmy raz lub więcej razy wcześniej.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ czynników}} = m^n$ wyników.

Zadanie 29.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Udowodnij, że wówczas $|S(n)| = 2^n$.

Rozwiązanie

Wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania, w którym przyjmujemy $m = 2$.

Zadanie 30.

Dane są liczby naturalne n i m (takie, że $n, m \geqslant 1$) i dany jest zbiór A taki, że $|A| = m$. Definiujemy zbiór B w następujący sposób:

• zbiór B składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ takich, że $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Udowodnij, że $|A| = m^n$.

Rozwiązanie

Wykonujemy n czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszego elementu ze zbioru A; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiego elementu ze zbioru A; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za drugim razem możemy ponownie wybrać dowolny element zbioru A, nawet jeśli go już wybraliśmy za pierwszym razem,

• ...

• ostatnia, n-ta czynność polega na wybraniu n-tego elementu ze zbioru A; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych $n-1$ czynności, także kończy się jednym z m wyników, gdyż za ostatnim razem możemy ponownie wybrać dowolny element zbioru A, nawet jeśli go już wybraliśmy raz lub więcej razy wcześniej.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ czynników}} = m^n$ wyników.

Zadanie 31.

Rzucamy 5 razy kostką dwudziestościenną, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile jest możliwych wyników, w których żadna z wyrzuconych liczb nie jest większa od k (gdzie $1 \leqslant k \leqslant 20$)?

Rozwiązanie

Wystarczy skorzystać z poprzedniego zadania, w którym przyjmujemy, że $A = [k]$.

Zadanie 32.

Dana jest liczba naturalna $m \geqslant 2$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

• zbiór A składa się z par (a, b) takich, że $1 \leqslant a, b \leqslant m$ oraz $a \neq b$ (czyli, inaczej mówiąc, $a, b \in [m]$ oraz $a \neq b$).

Udowodnij, że $|A| = m \cdot (m-1)$.

Rozwiązanie

Wykonujemy dwie czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym z $m-1$ wyników, gdyż za drugim razem nie możemy ponownie wybrać liczby, którą już wybraliśmy za pierwszym razem.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $m\cdot(m-1)$ wyników.

Uwaga

Zauważmy, że we wszystkich zadaniach, z wyjątkiem ostatniego, zbiór wyników każdej czynności był zawsze taki sam, niezależnie od wyników poprzednio wykonanych czynności. Wynikało to stąd, że w kolejnych czynnościach mogliśmy wybrać dowolny element tego samego ustalonego zbioru. W ostatnim zadaniu jest inaczej. W zależności od wyniku pierwszej czynności, zbiór możliwych wyników drugiej czynności będzie inny. Popatrzmy na przykład. Niech $m=5$. Pierwsza czynność kończy się jednym z 5 wyników — tymi wynikami są liczby od 1 do 5. A oto możliwy zbiór wyników drugiej czynności, w zależności od wyniku pierwszej:

- jeśli pierwsza czynność kończy się wynikiem 1, to zbiorem możliwych wyników drugiej czynności jest $\{2,3,4,5\}$,
- jeśli pierwsza czynność kończy się wynikiem 2, to zbiorem możliwych wyników drugiej czynności jest $\{1,3,4,5\}$,
- jeśli pierwsza czynność kończy się wynikiem 3, to zbiorem możliwych wyników drugiej czynności jest $\{1,2,4,5\}$,
- jeśli pierwsza czynność kończy się wynikiem 4, to zbiorem możliwych wyników drugiej czynności jest $\{1,2,3,5\}$,
- jeśli pierwsza czynność kończy się wynikiem 5, to zbiorem możliwych wyników drugiej czynności jest $\{1,2,3,4\}$.

Zbiory możliwych wyników są różne, ale mają tyle samo elementów. To właśnie pozwala skorzystać z reguły mnożenia.

Zadanie 33.

Dana jest liczba naturalna $m\geqslant 3$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z trójek (a,b,c) takich, że $1\leqslant a,b,c\leqslant m$ oraz żadne dwie z tych trzech liczb nie są równe (czyli, inaczej mówiąc, $a,b,c\in[m]$ oraz $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$).

Udowodnij, że $|A|=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)$.

Rozwiązanie

Wykonujemy trzy czynności:

- pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby a ze zbioru $[m]$; ta czynność kończy się jednym z m wyników,
- druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby b ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym z $m-1$ wyników, gdyż za drugim razem nie możemy ponownie wybrać liczby, którą już wybraliśmy za pierwszym razem (a więc tak naprawdę w drugiej czynności wybieramy liczbę b ze zbioru $[m]\setminus\{a\}$),
- trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej liczby c ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyników pierwszych dwóch czynności, kończy się jednym z $m-2$ wyników, gdyż za trzecim razem nie możemy ponownie wybrać liczby, którą już wybraliśmy za pierwszym lub za drugim razem (czyli wybieramy liczbę c ze zbioru $[m]\setminus\{a,b\}$).

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)$ wyników.

Zadanie 34.

Rzucamy 5 razy kostką dwudziestościenną, zapisując wyniki w kolejności rzutów. Ile jest możliwych wyników, w których żadna liczba się nie powtórzy?

Rozwiązanie

Wykonujemy pięć czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby; ta czynność kończy się jednym z 20 wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym z 19 wyników, gdyż druga liczba nie może być równa pierwszej,

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej liczby; ta czynność, niezależnie od wyników pierwszej i drugiej czynności, kończy się jednym z 18 wyników, gdyż trzecia liczba musi być różna od pierwszych dwóch,

• czwarta czynność polega na wybraniu czwartej liczby; ta czynność, niezależnie od wyników pierwszych trzech czynności, kończy się jednym z 17 wyników, gdyż czwarta liczba musi być różna od pierwszych trzech,

• piąta czynność polega na wybraniu piątej liczby; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych czterech czynności, kończy się jednym z 16 wyników, gdyż piąta liczba musi być różna od pierwszych czterech.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16=1860480$ wyników.

Zadanie 35.

Dane są liczby naturalne n i m (takie, że $1\leqslant n\leqslant m$). Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

• zbiór A składa się z ciągów $(a_1,\dots,a_n)$ takich, że $1\leqslant a_1,\dots,a_n\leqslant m$ oraz żadne dwa wyrazy ciągu nie są równe (czyli, inaczej mówiąc, $a_1,\dots,a_n\in[m]$ oraz $a_i\neq a_j$ dla dowolnych i oraz j takich, że $1\leqslant i<j\leqslant n$).

Udowodnij, że $|A|=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$.

Rozwiązanie

Wykonujemy n czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej liczby a_1 ze zbioru $[m]$; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiej liczby a_2 ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym z $m-1$ wyników, gdyż za drugim razem nie możemy ponownie wybrać liczby, którą już wybraliśmy za pierwszym razem (zatem liczbę a_2 wybieramy ze zbioru $[m]\setminus\{a_1\}$),

• ...

• ostatnia, n-ta czynność polega na wybraniu n-tej liczby a_n ze zbioru $[m]$; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych $n-1$ czynności, kończy się jednym z $m-n+1$ wyników, gdyż za ostatnim razem nie możemy ponownie wybrać żadnej liczby, którą wybraliśmy w jednej z wcześniejszych czynności (zatem liczbę a_n wybieramy ze zbioru $[m] \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$).

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$ wyników (w tym iloczynie znajduje się dokładnie n czynników: pierwszy jest równy m, każdy następny jest o 1 mniejszy od poprzedniego).

Zadanie 36.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

• zbiór A składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ takich, że $1 \leqslant a_1, \ldots, a_n \leqslant n$ oraz żadne dwa wyrazy ciągu nie są równe (czyli, inaczej mówiąc, $a_1, \ldots, a_n \in [n]$ oraz $a_i \neq a_j$ dla dowolnych i oraz j takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$).

Udowodnij, że $|A| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Rozwiązanie

Korzystamy z poprzedniego zadania, w którym przyjmujemy $m = n$.

Uwaga

Iloczyn $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ jest oznaczany symbolem $n!$. Przyjmujemy również, że $0! = 1$. Ciąg długości n, którego wyrazami są wszystkie liczby od 1 do n, w dowolnej kolejności, nazywamy **permutacją** zbioru liczb $[n]$.

Zadanie 37.

Dane są liczby naturalne n i m (takie, że $1 \leqslant n \leqslant m$) i dany jest zbiór A taki, że $|A| = m$. Definiujemy zbiór B w następujący sposób:

• zbiór B składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ takich, że $a_1, \ldots, a_n \in A$ oraz żadne dwa wyrazy ciągu nie są równe (czyli, inaczej mówiąc, $a_i \neq a_j$ dla dowolnych i oraz j takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$).

Udowodnij, że $|A| = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$.

Rozwiązanie

Wykonujemy n czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszego elementu ze zbioru A; ta czynność kończy się jednym z m wyników,

• druga czynność polega na wybraniu drugiego elementu ze zbioru A; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszej czynności, kończy się jednym z $m-1$ wyników, gdyż za drugim razem nie możemy ponownie wybrać elementu wybranego za pierwszym razem,

• ...

• ostatnia, n-ta czynność polega na wybraniu n-tego elementu ze zbioru A; ta czynność, niezależnie od wyniku pierwszych $n-1$ czynności, kończy się jednym z $m-n+1$ wyników, gdyż za ostatnim razem nie możemy ponownie wybrać żadnego elementu, który został wybrany w jednej z wcześniejszych czynności.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ wyników (w tym iloczynie znajduje się dokładnie n czynników: pierwszy jest równy m, każdy następny jest o 1 mniejszy od poprzedniego).

Zadanie 38.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$ i dany jest zbiór A taki, że $|A| = n$. Definiujemy zbiór B w następujący sposób:

• zbiór B składa się z ciągów $(a_1,\ldots,a_n)$ takich, że $a_1,\ldots,a_n \in A$ oraz żadne dwa wyrazy ciągu nie są równe (czyli, inaczej mówiąc, $a_i \neq a_j$ dla dowolnych i oraz j takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n$).

Udowodnij, że $|A| = n!$.

Rozwiązanie

Korzystamy z poprzedniego zadania, w którym przyjmujemy $m = n$.

Uwaga

Ciąg długości n, którego wyrazami są wszystkie elementy danego n-elementowego zbioru A (w dowolnej kolejności) nazywamy **permutacją** zbioru A (lub permutacją elementów tego zbioru).

Zadanie 39.

Ile jest liczb czterocyfrowych?

Rozwiązanie

Wykonujemy cztery czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 9 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0),

• druga czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników,

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników,

• czwarta czynność polega na wybraniu czwartej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników.

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 9000$ wyników.

Zadanie 40.

Ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych?

Rozwiązanie

Wykonujemy cztery czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 9 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0),

• druga czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników,

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników,

• czwarta czynność polega na wybraniu czwartej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 5 wyników (bo ostatnia cyfra musi być nieparzysta).

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ wyników.

Zadanie 41.

Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych?

Rozwiązanie

Wykonujemy cztery czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 9 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0),

• druga czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników,

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 10 wyników,

• czwarta czynność polega na wybraniu czwartej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 5 wyników (bo ostatnia cyfra musi być parzysta).

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ wyników.

Zadanie 42.

Ile jest liczb czterocyfrowych o czterech różnych cyfrach (tzn. takich, w których żadna cyfra się nie powtarza)?

Rozwiązanie

Wykonujemy cztery czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 9 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0),

• druga czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 9 wyników (bo druga cyfra musi być różna od pierwszej),

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 8 wyników (bo trzecia cyfra musi być różna od pierwszych dwóch),

• czwarta czynność polega na wybraniu czwartej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 7 wyników (bo czwarta cyfra musi być różna od pierwszych trzech).

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ wyników.

Zadanie 43.

Ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych o czterech różnych cyfrach (tzn. takich, w których żadna cyfra się nie powtarza)?

Rozwiązanie

Wykonujemy cztery czynności; tym razem jednak będziemy wybierać cyfry w innej kolejności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu ostatniej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 5 wyników (bo ostatnia cyfra musi być nieparzysta),

• druga czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 8 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0 i pierwsza cyfra musi być różna od ostatniej),

• trzecia czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 8 wyników (bo druga cyfra musi być różna od pierwszej i ostatniej),

• czwarta czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 7 wyników (bo trzecia cyfra musi być różna od pierwszych dwóch i ostatniej).

Z reguły mnożenia wynika, że łącznie możemy otrzymać $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ wyników.

5.5. Reguły dodawania i mnożenia razem

W tym rozdziale zajmiemy się zadaniami, w których będziemy wykorzystywać wszystkie poznane zasady kombinatoryczne. W szczególności zobaczymy rozwiązania zadań, w których są wykorzystywane jednocześnie reguły dodawania i mnożenia.

Zadanie 44.

Ile jest parzystych liczb czterocyfrowych o czterech różnych cyfrach (tzn. takich, w których żadna cyfra się nie powtarza)?

Rozwiązanie

Jeden sposób rozwiązania polega na skorzystaniu z zadań 42 i 43. Istnieje 4536 liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, wśród nich jest 2240 liczb nieparzystych. Stąd wynika, że istnieje $4536 - 2240 = 2296$ parzystych liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach.

Drugi sposób rozwiązania polega na zastosowaniu reguły dodawania i reguły mnożenia. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Ostatnią cyfrą naszej liczby jest zero. Teraz wykonujemy trzy czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 9 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0),

• druga czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 8 wyników (bo druga cyfra musi być różna od pierwszej i od czwartej),

• trzecia czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 7 wyników (bo trzecia cyfra musi być różna od pierwszych dwóch i od czwartej).

Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ liczby.

Przypadek 2. Ostatnia cyfra jest różna od zera. Tym razem mamy do wykonania cztery czynności; jeszcze raz zaczniemy od wybierania ostatniej cyfry:

• pierwsza czynność polega na wybraniu ostatniej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 4 wyników (bo ostatnia cyfra musi być parzysta i różna od zera),

• druga czynność polega na wybraniu pierwszej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry tysięcy); ta czynność kończy się jednym z 8 wyników (bo pierwszą cyfrą nie może być 0 i pierwsza cyfra musi być różna od ostatniej),

• trzecia czynność polega na wybraniu drugiej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry setek); ta czynność kończy się jednym z 8 wyników (bo druga cyfra musi być różna od pierwszej i ostatniej),

• czwarta czynność polega na wybraniu trzeciej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry dziesiątek); ta czynność kończy się jednym z 7 wyników (bo trzecia cyfra musi być różna od pierwszych dwóch i ostatniej).

Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$ liczby.

Wreszcie z reguły dodawania wynika, że istnieje $504 + 1792 = 2296$ parzystych liczb czterocyfrowych o czterech różnych cyfrach.

Zadanie 45.

Ile jest parzystych liczb siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedno zero i dokładnie jedna jedynka?

Rozwiązanie

Zastosujemy reguły dodawania i mnożenia. Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1. Ostatnią cyfrą naszej liczby jest zero. Teraz wykonujemy dwie czynności:

• pierwsza czynność polega na wybraniu miejsca, na którym umieścimy jedynkę; ta czynność kończy się jednym z 6 wyników (bo po umieszczeniu zera na ostatnim miejscu mamy do wyboru 6 pierwszych miejsc),

• druga czynność polega na wpisaniu w każde z pozostałych wolnych 5 miejsc jednej z 8 cyfr różnych od zera i od 1; ta czynność kończy się jednym z 8^5 wyników.

Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $6 \cdot 8^5$ liczb.

Przypadek 2. Ostatnia cyfra jest różna od zera. Tym razem mamy do wykonania cztery czynności; zaczniemy od wybierania ostatniej cyfry:

• pierwsza czynność polega na wybraniu ostatniej cyfry naszej liczby (tzn. cyfry jedności); ta czynność kończy się jednym z 4 wyników (bo ostatnia cyfra musi być parzysta i różna od zera),

• druga czynność polega na wybraniu miejsca na wpisanie zera; ta czynność kończy się jednym z 5 wyników (bo pierwsza cyfra nie może być zerem i w tym przypadku ostatnia też nie jest zerem),

• trzecia czynność polega na wybraniu miejsca na wpisanie jedynki; ta czynność kończy się jednym z 5 wyników (bo jedynki nie można wpisać na miejscu ostatnim i na miejscu wybranym dla zera),

• czwarta czynność polega na wpisaniu w każde z pozostałych wolnych 4 miejsc jednej z 8 cyfr różnych od zera i od 1; ta czynność kończy się jednym z 8^4 wyników.

Z reguły mnożenia wynika, że w tym przypadku mamy $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8^4$ liczb.

Wreszcie z reguły dodawania wynika, że istnieje $6 \cdot 8^5 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8^4 = 148 \cdot 8^4 = 606208$ liczb rozważanych w tym zadaniu.

Zadanie 46.

Ile jest nieparzystych liczb naturalnych czterocyfrowych, w których co najmniej jedna cyfra jest dziewiątką?

Rozwiązanie

Omówimy 6 sposobów rozwiązania tego zadania.

I sposób rozwiązania

W tym sposobie spróbujemy wypisać interesujące nas liczby w kolejności rosnącej. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że jest to idiotyczna metoda rozwiązywania zadania. Tych liczb jest dużo (okaże się, że prawie 2000) i z pewnością nie uda nam się w rozsądnym czasie wypisać wszystkich. Po chwili zastanowienia możemy jednak dostrzec, że wypisywanie kolejno właściwych liczb pozwala zauważyć pewną regułę ogólną, a ta reguła z kolei pozwala wszystkie te liczby łatwo zliczyć. Zaczynamy od liczb, w których pierwszą cyfrą jest jedynka. Niech drugą cyfrą będzie zero. Pierwsze 9 liczb to 1009, 1019, 1029 i tak dalej aż do 1089. Potem dziewiątka pojawi się na trzecim miejscu i na czwartym możemy mieć dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. W ten sposób dostaniemy 14 najmniejszych liczb. Potem będzie to samo, ale zaczynamy nie od cyfr 1, 0, ale od cyfr 1, 1. Dostaniemy następne 14 liczb. I tak będzie 9 razy (bo drugą cyfrą może być dowolna cyfra różna od 9):

1009	1019	1029	1039	1049	1059	1069	1079	1089
1091	1093	1095	1097	1099				
1109	1119	1129	1139	1149	1159	1169	1179	1189
1191	1193	1195	1197	1199				
1209	1219	1229	1239	1249	1259	1269	1279	1289
1291	1293	1295	1297	1299				
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1809	1819	1829	1839	1849	1859	1869	1879	1889
1891	1893	1895	1897	1899				

W ten sposób dostaniemy $9 \cdot 14 = 126$ liczb. Teraz pora na liczby zaczynające się od cyfr 1, 9. Na ostatnich dwóch miejscach możemy zapisać dowolną dwucyfrową liczbę nieparzystą. Liczb dwucyfrowych jest 100, nieparzystych jest połowa, a więc 50. Oto te 50 liczb czterocyfrowych:

1901	1903	1905	1907	1909
1911	1913	1915	1917	1919
1921	1923	1925	1927	1929
1931	1933	1935	1937	1939
1941	1943	1945	1947	1949
1951	1953	1955	1957	1959
1961	1963	1965	1967	1969
1971	1973	1975	1977	1979
1981	1983	1985	1987	1989
1991	1993	1995	1997	1999

Mamy zatem 176 liczb. I tak będzie 8 razy (pierwszą cyfrą może być dowolna cyfra oprócz 0 i 9. Mamy zatem $8 \cdot 176 = 1408$ liczb. Zostały liczby zaczynające się cyfrą 9. Na ostatnich trzech miejscach możemy zapisać dowolną liczbę trzycyfrową nieparzystą. Jest ich 500. Zatem łącznie mamy 1908 liczb.

Jeden komentarz do tego sposobu rozwiązania: jeśli nie umiemy rozwiązać zadania, to czasem opłaca się podjąć wysiłek, by zacząć rozwiązywać je metodą najbardziej brutalną, na pierwszy rzut oka bezsensowną, nie dającą szans na dokończenie rozwiązania w sensownym czasie. Może się okazać, że w czasie rozwiązywania dostrzeżemy jakiś sposób, który jednak pozwoli dokończyć rozwiązanie szybciej.

II sposób rozwiązania

W tym rozwiązaniu rozpatrzymy cztery przypadki w zależności od liczby dziewiątek w zliczanych liczbach. Najpierw policzymy liczby, w których jest tylko jedna cyfra 9. Możemy umieścić ją na jednym z czterech miejsc.

• Jeśli umieścimy jedyną dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim i trzecim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na czwartym dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku $9 \cdot 9 \cdot 4 = 324$ liczby.

• Jeśli umieścimy jedyną dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), na trzecim miejscu dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8) i na czwartym dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$ liczb.

• Jeśli umieścimy jedyną dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), na drugim miejscu dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8) i na czwartym dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7. Łącznie daje to w tym przypadku $8 \cdot 9 \cdot 4 = 288$ liczb.

• Jeśli umieścimy jedyną dziewiątkę na czwartym miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim i trzecim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ liczb.

W sumie daje to $324 + 288 + 288 + 648 = 1548$ liczb z jedną dziewiątką.

Następnie zliczamy liczby, w których są dwie dziewiątki. Te dwa miejsca, na których umieszczamy dwie dziewiątki możemy wybrać spośród czterech miejsc na sześć sposobów.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i drugim miejscu, to na trzecim miejscu możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na czwartym możemy umieścić dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7. Łącznie daje to w tym przypadku $9 \cdot 4 = 36$ liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i trzecim miejscu, to na drugim miejscu możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na czwartym możemy umieścić dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7. Łącznie daje to w tym przypadku $9 \cdot 4 = 36$ liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym i czwartym miejscu, to na drugim i trzecim miejscu możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku $9 \cdot 9 = 81$ liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na czwartym dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7. Łącznie daje to w tym przypadku $8 \cdot 4 = 32$ liczby.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim i czwartym miejscu, to na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), a na trzecim miejscu możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku $8 \cdot 9 = 72$ liczby.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim i czwartym miejscu, to na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), a drugim możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku $8 \cdot 9 = 72$ liczby.

W sumie daje to $36 + 36 + 81 + 32 + 72 + 72 = 329$ liczb z dwiema dziewiątkami.

Teraz zliczamy liczby z trzema dziewiątkami. Te dziewiątki możemy umieścić na cztery sposoby.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym, drugim i trzecim miejscu, to na czwartym miejscu możemy umieścić dowolną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5 lub 7. W tym przypadku mamy zatem 4 liczby.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym, drugim i czwartym miejscu, to na trzecim miejscu możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). W tym przypadku mamy zatem 9 liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym, trzecim i czwartym miejscu, to na drugim miejscu możemy umieścić dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). W tym przypadku mamy zatem 9 liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim, trzecim i czwartym miejscu, to na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8). W tym przypadku mamy zatem 8 liczb.

W sumie daje to $4+9+9+8=30$ liczb z trzema dziewiątkami.

Wreszcie mamy jedną liczbę z czterema dziewiątkami; jest nią 9999.

Teraz dodajemy otrzymane wyniki. Mamy zatem $1548+329+30+1=1908$ liczb.

III sposób rozwiązania

W tym sposobie rozwiązania pokażę najpierw rozumowanie błędne. Wskazany błąd jest niezwykle często popełniany przez uczniów rozwiązujących podobne zadania. Wiemy, że jedną z cyfr jest 9; możemy ją umieścić na jednym z czterech miejsc: pierwszym, drugim, trzecim lub czwartym.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na pierwszym miejscu, to na drugim i trzecim możemy umieścić dowolną z 10 cyfr, a na czwartym dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 500 liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, na trzecim dowolną z 10 cyfr, a na czwartym dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 450 liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, na drugim dowolną z 10 cyfr, a na czwartym dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku 450 liczb.

• Jeśli umieścimy dziewiątkę na czwartym miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 9 cyfr, a na drugim i trzecim dowolną z 10 cyfr. Łącznie daje to w tym przypadku 900 liczb.

W sumie daje to $500+450+450+900=2300$ liczb.

Gdzie jest błąd w tym rozumowaniu? Otóż okazuje się, że niektóre liczby zostały policzone wielokrotnie. Przypuśćmy, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na pierwszym miejscu, a na pozostałych miejscach umieściliśmy kolejno cyfry 5, 2 i 9. Otrzymaliśmy liczbę 9529. Przypuśćmy teraz, że najpierw umieściliśmy cyfrę 9 na czwartym miejscu, a następnie umieściliśmy na pierwszych trzech miejscach kolejno cyfry 9, 5 i 2. Znów otrzymaliśmy liczbę 9529. Ta liczba została więc w powyższym sposobie zliczania policzona dwukrotnie. Zobaczmy teraz, w jaki sposób można poprawić to rozwiązanie błędne.

Dostaliśmy wynik 2300, ale niektóre liczby zostały policzone wielokrotnie: liczby z dwiema dziewiątkami były policzone po dwa razy, liczby z trzema dziewiątkami po trzy razy, a liczba 9999 nawet cztery razy. W sposobie drugim policzyliśmy liczby z dwiema i trzema dziewiątkami: z dwiema jest 329 liczb, z trzema 30. Mamy też jedną liczbę z czterema dziewiątkami: 9999. Od otrzymanego wyniku musimy zatem odjąć 329 (czyli liczbę policzonych podwójnie liczb z dwiema dziewiątkami), następnie odjąć 60 (czyli podwojoną liczbę policzonych podwójnie liczb z trzema dziewiątkami) i wreszcie odjąć 3 (gdyż liczbę 9999 policzyliśmy 4 razy).

Mamy zatem $2300-329-2\cdot 30-3=2300-392=1908$ liczb.

IV sposób rozwiązania

W tym sposobie najpierw policzymy wszystkie liczby czterocyfrowe nieparzyste, a następnie od otrzymanego wyniku odejmiemy liczbę „złych” liczb, tzn. tych liczb, w których dziewiątka nie występuje.

Wszystkich liczb czterocyfrowych jest 9000; co druga jest nieparzysta. Istnieje zatem 4500 liczb czterocyfrowych nieparzystych. Możemy również rozumować następująco: na pierwszym miejscu można umieścić jedną z dziewięciu cyfr, na drugim i trzecim jedną z dziesięciu cyfr, a na czwartym jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Z reguły mnożenia wynika, że mamy zatem $9\cdot 10\cdot 10\cdot 5=4500$ czterocyfrowych liczb nieparzystych. Teraz policzymy wszystkie czterocyfrowe liczby nieparzyste, w których nie występuje cyfra 9. Tym razem na pierwszym miejscu możemy umieścić jedną z ośmiu cyfr (od 1 do 8), na drugim i trzecim jedną z dziewięciu cyfr (od 0 do 8), a na czwartym jedną z czterech różnych od 9 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7; łącznie mamy zatem $8\cdot 9\cdot 9\cdot 4=2592$ „złych” liczb. Liczby, o które chodzi w zadaniu, to oczywiście liczby **należące** do pierwszej grupy (wszystkie czterocyfrowe liczby nieparzyste) i **nie należące** do drugiej grupy (w której są czterocyfrowe liczby nieparzyste **bez** dziewiątki). Stąd wynika, że liczb, o które chodzi w zadaniu, jest $4500-2592=1908$.

V sposób rozwiązania

W tym sposobie rozwiązania będziemy rozpatrywać cztery przypadki w zależności od tego, na którym miejscu znajduje się pierwsza dziewiątka.

- Jeśli pierwszą dziewiątkę umieścimy na pierwszym miejscu, to na drugim i trzecim możemy umieścić dowolną z 10 cyfr, a na czwartym dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku $10\cdot 10\cdot 5=500$ liczb.

- Jeśli pierwszą dziewiątkę umieścimy na drugim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), na trzecim dowolną z 10 cyfr, a na czwartym dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku $8\cdot 10\cdot 5=400$ liczb.

- Jeśli pierwszą dziewiątkę umieścimy na trzecim miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), na drugim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8), a na czwartym dowolną z pięciu cyfr nieparzystych. Łącznie daje to w tym przypadku $8\cdot 9\cdot 5=360$ liczb.

- Jeśli pierwszą dziewiątkę umieścimy na czwartym miejscu, to na pierwszym możemy umieścić dowolną z 8 cyfr (od 1 do 8), a na drugim i trzecim dowolną z 9 cyfr (od 0 do 8). Łącznie daje to w tym przypadku $8\cdot 9\cdot 9=648$ liczb.

W sumie daje to $500+400+360+648=1908$ liczb.

Oczywiście w podobny sposób moglibyśmy rozpatrywać cztery przypadki w zależności od tego, na którym miejscu znajduje się ostatnia dziewiątka. Szczegóły takiego rozwiązania pozostawię jako ćwiczenie.

VI sposób rozwiązania

W tym sposobie zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń dla czterech liczb. Definiujemy cztery zbiory A, B, C i D w następujący sposób:

- w zbiorze A znajdują się liczby, w których na pierwszym miejscu znajduje się cyfra 9,

- w zbiorze B znajdują się liczby, w których na drugim miejscu znajduje się cyfra 9,
- w zbiorze C znajdują się liczby, w których na trzecim miejscu znajduje się cyfra 9,
- w zbiorze D znajdują się liczby, w których na czwartym miejscu znajduje się cyfra 9,

Oczywiście chcemy obliczyć $|A \cup B \cup C \cup D|$. Zastosujemy wzór:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.$$

Teraz mamy (szczegóły obliczeń zostawiam jako ćwiczenie):

$$|A| = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500, \quad |B| = 9 \cdot 10 \cdot 5 = 450, \quad |C| = 9 \cdot 10 \cdot 5 = 450, \quad |D| = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900,$$
$$|A \cap B| = 10 \cdot 5 = 50, \quad |A \cap C| = 10 \cdot 5 = 50, \quad |A \cap D| = 10 \cdot 10 = 100,$$
$$|B \cap C| = 9 \cdot 5 = 45, \quad |B \cap D| = 9 \cdot 10 = 90, \quad |C \cap D| = 9 \cdot 10 = 90,$$
$$|A \cap B \cap C| = 5, \quad |A \cap B \cap D| = 10, \quad |A \cap C \cap D| = 10, \quad |B \cap C \cap D| = 9,$$
$$|A \cap B \cap C \cap D| = 1.$$

Stąd

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 500 + 450 + 450 + 900 - 50 - 50 - 100 - 45 - 90 - 90 + 5 + 10 + 10 + 9 - 1 = \\ = 2300 - 425 + 34 - 1 = 1908.$$

5.6. Współczynniki dwumianowe i dowody kombinatoryczne.

Ostatnim pojęciem kombinatorycznym, które omówię w tych wykładach, jest tzw. **współczynnik dwumianowy**. Zanim go zdefiniuję, zajmę się jeszcze raz zliczaniem ciągów zero-jedynkowych. Jak wiemy, istnieje 2^n takich ciągów. Ważne ćwiczenie polega na wypisaniu wszystkich takich ciągów długości 2, 3, 4 i 5 i policzeniu, ile wśród nich jest ciągów z daną liczbą jedynek. Oto te ciągi długości 5:

00000	00001	00011	00111	01111	11111
	00010	00101	01011	10111	
	00100	00110	01101	11011	
	01000	01001	01110	11101	
	10000	01010	10011	11110	
		01100	10101		
		10001	10110		
		10010	11001		
		10100	11010		
		11000	11100		

W pierwszej kolumnie mamy jedyny ciąg mający same zera, czyli mający zero jedynek. W drugiej kolumnie mamy 5 ciągów z jedną jedynką, w następnej 10 ciągów z dwiema jedynkami i tak dalej. Po prawidłowym wypisaniu wszystkich ciągów i obliczeniu, ile z nich ma daną liczbę jedynek, zauważamy, że otrzymane liczby są dobrze znane z trójkąta Pascala (który uczniowie powinni widzieć wcześniej, na przykład przy okazji wzorów skróconego mnożenia):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Teraz wprowadzamy definicję **współczynnika dwumianowego**: liczba $\binom{n}{k}$ jest równa liczbie ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek. Otrzymany trójkąt Pascala wygląda wtedy następująco:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{3}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Znamy zasadę tworzenia trójkąta Pascala: każdy wiersz zaczyna się i kończy jedynką oraz każdy wyraz jest sumą dwóch wyrazów stojących nad nim jeden wiersz wyżej. Tę zasadę możemy sformułować w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Dla dowolnego $n \geqslant 1$ mamy:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Ponadto dla dowolnego $n \geqslant 2$ i dowolnego k takiego, że $0 < k < n$ mamy

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dowód

Równość $\binom{n}{0} = 1$ wynika stąd, że istnieje dokładnie jeden ciąg zerojedynkowy długości n mający 0 jedynek, mianowicie ciąg składający się z samych zer. Podobnie $\binom{n}{n} = 1$, bo tylko jeden ciąg zerojedynkowy długości n ma n jedynek; jest to ciąg składający się z samych jedynek. Przypuśćmy teraz, że mamy liczby n i k takie, że $n \geqslant 2$ oraz $0 < k < n$. Wszystkie ciągi zerojedynkowe długości n i mające k jedynek podzielimy teraz na dwa zbiory. W zbiorze A znajdą się te ciągi, w których ostatni wyraz jest równy 1. W zbiorze B znajdą się te ciągi, w których ostatni wyraz jest równy 0. Popatrzmy na przykład. Niech $n=6$ i $k=4$. Oto wszystkie ciągi zerojedynkowe długości 6, w których występują 4 jedynki:

00111 | 1	01111 | 0
01011 | 1	10111 | 0
01101 | 1	11011 | 0
01110 | 1	11101 | 0
10011 | 1	11110 | 0
10101 | 1	
10110 | 1	
11001 | 1	
11010 | 1	
11100 | 1	

Ostatnie wyrazy tych ciągów zostały oddzielone kreską. Po lewej stronie mamy ciągi kończące się jedynką, po prawej stronie mamy ciągi kończące się zerem. Zauważmy, że przed kreską mamy po lewej stronie wszystkie możliwe ciągi zerojedynkowe długości 5 z trzema jedynkami, a po prawej stronie wszystkie możliwe ciągi zerojedynkowe długości 5 z czterema jedynkami. A więc w naszym przykładzie mamy równość

$$\binom{6}{4}=\binom{5}{3}+\binom{5}{4}.$$

Popatrzmy teraz na te ciągi w całej ogólności. Najpierw we wszystkich ciągach należących do zbioru A skreślmy ostatnią jedynkę — otrzymamy wszystkie możliwe ciągi zerojedynkowe długości $n-1$ mające $k-1$ jedynek (pamiętajmy, że jedną z k jedynek skreśliliśmy). Następnie we wszystkich ciągach należących do zbioru B skreślmy ostatnie zero — otrzymamy wszystkie ciągi zerojedynkowe długości n mające k jedynek. Zatem z definicji współczynnika dwumianowego mamy równości

$$|A|=\binom{n-1}{k-1} \quad \text{oraz} \quad |B|=\binom{n-1}{k}.$$

Ponieważ zbiory A i B nie mają wspólnych elementów oraz zbiór $A\cup B$ składa się ze wszystkich ciągów zerojedynkowych długości n mających k jedynek, więc

$$\binom{n}{k}=|A\cup B|=|A|+|B|=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

To kończy dowód twierdzenia. □

Naturalnym pytaniem jest to, w jaki sposób możemy obliczać współczynniki dwumianowe. Dla małych n możemy po prostu wypisać kilka początkowych wierszy trójkąta Pascala. Dla $k=2$ i $k=3$ możemy skorzystać z wyników następujących dwóch zadań.

Zadanie 47.

Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Definiujemy zbiory A i B w następujący sposób:

- zbiór A składa się z par (i,j) takich, że $1\leqslant i<j\leqslant n$,
- zbiór B składa się z par (i,j) takich, że $1\leqslant i,j\leqslant n$ oraz $i\neq j$.

Udowodnij, że wówczas $2\cdot|A|=|B|$. Wyprowadź stąd wniosek, że $\binom{n}{2}=|S_2(n)|=|A|=\frac{n(n-1)}{2}$.

Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że $2\cdot|A|=|B|$. W tym celu każdą parę (i,j) ze zbioru A połączymy w pary z dwiema parami ze zbioru B: (i,j) oraz (j,i). Nietrudno sprawdzić, że każda para ze zbioru B będzie w ten sposób połączona z dokładnie jedną parą ze zbioru A. To dowodzi, że $2\cdot|A|=|B|$. Z zadania 7 wiemy, że $|A|=|S_2(n)|=\binom{n}{2}$ oraz z zadania 32 wiemy, że $|B|=n(n-1)$. To dowodzi, że $2\cdot\binom{n}{2}=n(n-1)$, czyli że $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Zadanie 48.

Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$. Definiujemy zbiory A i B w następujący sposób:

- zbiór A składa się z trójek (i,j,k) takich, że $1\leqslant i<j<k\leqslant n$,
- zbiór B składa się z trójek (i,j,k) takich, że $1\leqslant i,j,k\leqslant n$ oraz $i\neq j$, $i\neq k$, $j\neq k$.

Udowodnij, że wówczas $6\cdot|A|=|B|$. Wyprowadź stąd wniosek, że

$$\binom{n}{3}=|S_3(n)|=|A|=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że $6\cdot|A|=|B|$. W tym celu każdą trójkę (i,j,k) ze zbioru A połączymy w pary z sześcioma trójkami ze zbioru B:

$$(i,j,k),\quad (i,k,j),\quad (j,i,k),\quad (j,k,i),\quad (k,i,j),\quad (k,j,i).$$

Nietrudno sprawdzić, że każda trójka ze zbioru B będzie w ten sposób połączona z dokładnie jedną trójką ze zbioru A. To dowodzi, że $6\cdot|A|=|B|$. Z zadania 8 wiemy, że $|A|=|S_3(n)|=\binom{n}{3}$ oraz z zadania 33 wiemy, że $|B|=n(n-1)(n-2)$. To dowodzi, że $6\cdot\binom{n}{3}=n(n-1)(n-2)$, czyli że $\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

Oczywiście w podobny sposób można udowodnić, że

$$\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},\qquad \binom{n}{5}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

i tak dalej. Następne zadanie pokazuje, że powyższe wzory można uogólnić. Otrzymujemy w ten sposób wzór ogólny na współczynniki dwumianowe.

Zadanie 49.

Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1\leqslant k\leqslant n$. Definiujemy zbiory A i B w następujący sposób:

- zbiór A składa się z ciągów $(a_1,\ldots,a_k)$ takich, że $1\leqslant a_1<\ldots<a_k\leqslant n$,

- zbiór B składa się z ciągów $(a_1,\ldots,a_k)$ takich, że $1\leqslant a_1,\ldots,a_k\leqslant n$ oraz żadne dwa wyrazy ciągu nie są równe (tzn. $a_i\neq a_j$ dla dowolnych i,j takich, że $1\leqslant i<j\leqslant k$).

Udowodnij, że wówczas $k!\cdot|A|=|B|$. Wyprowadź stąd wniosek, że

$$\binom{n}{k}=|S_k(n)|=|A|=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Rozwiązanie

Najpierw wykażemy, że $k!\cdot|A|=|B|$. W tym celu każdy ciąg $(a_1,\ldots,a_k)$ ze zbioru A połączymy w $k!$ par z tymi ciągami ze zbioru B, które mają te same wyrazy co ciąg $(a_1,\ldots,a_k)$, ale we wszystkich możliwych kolejnościach. Inaczej mówiąc, ciąg $(a_1,\ldots,a_k)$ łączymy z ciągami, które są wszystkimi możliwymi permutacjami wyrazów tego ciągu. Nietrudno sprawdzić, że każdy ciąg ze zbioru B będzie w ten sposób połączony z dokładnie jednym ciągiem ze zbioru A — mianowicie z tym ciągiem, w którym wyrazy są uporządkowane rosnąco. To dowodzi, że $k!\cdot|A|=|B|$. Z zadania 9 wiemy, że $|A|=|S_k(n)|=\binom{n}{k}$ oraz z zadania 35 wiemy, że $|B|=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. To dowodzi, że $k!\cdot\binom{n}{k}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, czyli że $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

Wzór $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ można zapisać w innej postaci, rozszerzając ułamek po prawej stronie. Mianowicie licznik i mianownik tego ułamka mnożymy przez $(n-k)!$. Otrzymujemy wówczas

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Inny sposób wyprowadzenia tego wzoru wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1\leqslant k\leqslant n$. Wówczas

$$k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

Dowód

Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z ciągów długości n, w których jest $k-1$ wyrazów równych 1, jest jeden wyraz równy 2 i wszystkie pozostałe wyrazy są równe 0.

Zauważmy, że w każdym ciągu ze zbioru A jest dokładnie k wyrazów różnych od zera i $n-k$ wyrazów równych 0. Wśród wyrazów różnych od zera jest jedna dwójka i $k-1$ jedynek. Pomysł rozumowania polega na tym, by ciągi należące do zbioru A zliczyć dwoma sposobami. Ponieważ liczba elementów zbioru nie zależy oczywiście od sposobu zliczania, więc otrzymane dwie liczby będą równe. Oba sposoby zliczania polegają tak naprawdę na tym, by policzyć, na ile sposobów możemy taki ciąg skonstruować.

Sposób 1. Najpierw tworzymy ciąg zerojedynkowy długości n, w którym jest k jedynek (z definicji współczynnika dwumianowego możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów), a następnie jedną jedynkę zamieniamy na dwójkę (ponieważ jest k jedynek, więc niezależnie od tego, na których miejscach one stoją w naszym ciągu, możemy to zrobić na k sposobów). Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $k \cdot \binom{n}{k}$ ciągów rozważanej postaci.

Sposób 2. Najpierw wybieramy miejsce, na którym wpiszemy dwójkę. Możemy to miejsce wybrać na n sposobów. Pozostaje $n-1$ miejsc; możemy je potraktować jako miejsca, w które wpiszemy wyrazy ciągu zerojedynkowego długości $n-1$, w którym jest $k-1$ jedynek. Z definicji współczynnika dwumianowego wiemy, że istnieje $\binom{n-1}{k-1}$ takich ciągów. Znów korzystamy z reguły mnożenia i stwierdzamy, że istnieje $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ ciągów rozważanej postaci.

Jak wspomniałem, niezależnie od sposobu zliczania elementów, musimy otrzymać ten sam wynik. Mamy zatem równość

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek. Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1 \leqslant k \leqslant n$. Wówczas

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Sposób, w jaki możemy zastosować ten wniosek do obliczania współczynników dwumianowych, pokazuję na przykładzie zadania o grze losowej.

Zadanie 50.

Na ile sposobów można wybrać 6 różnych liczb spośród liczb od 1 do 49? Inaczej mówiąc, ile jest 6-elementowych podzbiorów zbioru 49-elementowego?

Rozwiązanie

Z definicji wiemy, że liczba takich podzbiorów jest równa $\binom{49}{6}$. Korzystając kilkakrotnie z powyższego wzoru oraz ze znanego nam już wzoru $\binom{n}{0} = 1$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\binom{49}{6} &= \frac{49}{6} \cdot \binom{48}{5} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \binom{47}{4} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \binom{46}{3} = \\
&= \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \binom{45}{2} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \binom{44}{1} = \\
&= \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{44}{1} \cdot \binom{43}{0} = \frac{49}{6} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{47}{4} \cdot \frac{46}{3} \cdot \frac{45}{2} \cdot \frac{44}{1} \cdot 1 = \\
&= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.
\end{aligned}$$

Po skróceniu ułamka (bo: $48=6\cdot 4\cdot 2$ oraz $15=5\cdot 3$), otrzymujemy

$$\binom{49}{6}=49\cdot 47\cdot 46\cdot 3\cdot 44=13983816.$$

Nietrudno uogólnić to rozumowanie, by otrzymać wzór na współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$. Ścisłe rozumowanie wymaga indukcji matematycznej. Ale możemy przekonać uczniów o słuszności wzoru na podstawie kilku przykładów pokazujących w istocie to samo rozumowanie lub za pomocą obliczenia:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1} = \\
&= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2} = \\
&= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\binom{n-3}{k-3} = \\
&\dots \\
&= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}\cdot\binom{n-k}{k-k} = \\
&= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}\cdot 1 = \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.
\end{aligned}$$

Znajomość wzoru ogólnego jest oczywiście bardzo przydatna w obu postaciach:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Proszę jednak uczniów, by zapamiętali kilka szczególnych przypadków tego wzoru i by w tych przypadkach nie odwoływali się do wzoru ogólnego. Oto te najważniejsze przypadki:

$$\binom{n}{1}=n,\qquad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2},\qquad \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Wzór ogólny na współczynniki dwumianowe możemy także wyprowadzić za pomocą bezpośredniego rozumowania kombinatorycznego.

Twierdzenie 3. Dane są liczby naturalne k i n takie, że $1\leqslant k\leqslant n-1$. Wówczas

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Uwaga

Założenia, że $k\geqslant 1$ oraz $k\leqslant n-1$ zostały przyjęte tylko ze względu na czytelność dowodu kombinatorycznego. Korzystając ze wzorów

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}\quad\text{oraz}\quad 0!=1$$

możemy pozbyć się tych założeń w sformułowaniu twierdzenia.

Dowód

Zliczamy dwoma sposobami permutacje zbioru $\{0,1,\ldots,n\}$, w których 0 stoi na miejscu $k+1$ (to znaczy przed zerem stoi k liczb, a po nim $n-k$ liczb; po to, by przed zerem i po zerze stała co najmniej jedna liczba, zostały przyjęte założenia, o których pisałem w uwadze powyżej).

Najpierw zauważamy, że skoro we wszystkich rozważanych ciągach zero stoi na tym samym miejscu, więc można je z tego ciągu usunąć. Otrzymamy dowolny ciąg długości n, w którym występują wszystkie liczby od 1 do n, a więc dowolną permutację zbioru $[n]$. Istnieje $n!$ takich permutacji, a więc istnieje $n!$ rozważanych ciągów.

Teraz zliczamy te ciągi drugim sposobem. Zliczanie polega na tym, by policzyć, na ile sposobów taki ciąg można utworzyć. Wykonujemy w tym celu trzy czynności:

- wybieramy k liczb ze zbioru $[n]$; możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustawiamy w dowolny sposób wybrane liczby na pierwszych k miejscach ciągu; możemy to zrobić na $k!$ sposobów,
- po tych k liczbach na następnym miejscu w ciągu ustawiamy 0 i po nim na ostatnich $n-k$ miejscach ustawiamy pozostałe $n-k$ liczb w dowolnej kolejności; możemy to zrobić na $(n-k)!$ sposobów.

Z reguły mnożenia wynika, że w ten sposób możemy utworzyć $\binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!$ ciągów. Oczywiście tak możemy utworzyć dowolny ciąg długości $n+1$ zawierający wszystkie liczby od 1 do n i taki, że na miejscu o numerze $k+1$ stoi zero. Zatem w ten sposób policzyliśmy wszystkie rozważane ciągi. Ponieważ liczba ciągów nie zależy od sposobu zliczania, więc otrzymujemy równość

$$n! = \binom{n}{k}\cdot k!\cdot(n-k)!,$$

czyli

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

To kończy dowód twierdzenia. □

Przydatne własności współczynników dwumianowych podają następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 4. Dla dowolnych liczb naturalnych k i n takich, że $0\leqslant k\leqslant n$ zachodzi równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dowód

Każdy ciąg zerojedynkowy długości n zawierający k jedynek łączymy w parę z ciągiem powstałym przez zamianę zer i jedynek — tak jak to robiliśmy w rozwiązaniu zadania 2. Ciąg, w którym jest k jedynek, ma oczywiście $n-k$ zer. Jest on połączony w parę z ciągiem mającym $n-k$ jedynek i k zer. Sprawdzenie warunków (R1), (R2) i (R3) jest łatwym ćwiczeniem. □

Twierdzenie 5. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Wtedy zachodzi następująca równość:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

Dowód

Zauważmy, że suma po lewej stronie jest równa liczbie tych ciągów zerojedynkowych długości n, w których występuje parzysta liczba jedynek. Podobnie, suma po prawej stronie jest równa liczbie tych ciągów zerojedynkowych długości n, w których występuje nieparzysta liczba jedynek. Z uwagi zamieszczonej po zadaniu 3 wynika, że te liczby są równe. To kończy dowód twierdzenia. □

Ten wykład chcę zakończyć kilkoma ogólnymi uwagami dotyczącymi nauczania kombinatoryki. Po pierwsze, kombinatoryka to nie tylko permutacje, kombinacje i wariacje (z powtórzeniami lub bez) i wzory na liczbę tych obiektów. Tych pojęć na lekcji wręcz nie omawiam. Kombinatoryka (przynajmniej w zakresie obowiązującym w szkole) to przede wszystkim sztuka zliczania elementów zbiorów skończonych. Chciałbym, by uczniowie nauczyli się tej sztuki korzystając z najprostszych zasad — ten sposób myślenia przyda im się w dalszej nauce kombinatoryki, bardziej niż wyłącznie umiejętność rozpoznawania wybranych obiektów kombinatorycznych (wspomniane permutacje, kombinacje i wariacje). Każde zadanie, w którym korzysta się z gotowych wzorów na liczbę wariacji, można bardzo łatwo rozwiązać bezpośrednio z reguły mnożenia — ale nie na odwrót. Przykładami były zadania 44–46.

Pokazane wyżej dwa ważne wzory:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \quad \text{oraz} \quad k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

(gdzie $1 \leqslant k \leqslant n-1$) zostały wyprowadzone bezpośrednio z definicji współczynnika dwumianowego $\binom{n}{k}$ jako liczby ciągów zerojedynkowych długości n, w których jest k jedynek, a nie za pomocą przekształceń algebraicznych wzoru z silniami. Takie dowody nazywamy w kombinatoryce **dowodami kombinatorycznymi**. Otrzymane w drodze rozumowania kombinatorycznego wzory mają widoczny sens; nie są tylko wynikiem zręcznej manipulacji symbolami i wzorami. To bardzo ważne, bo w ten sposób uczniowie dostrzegają treść poznawanych wzorów. Wiele wzorów można też znacznie łatwiej uzasadnić metodą kombinatoryczną, niż metodami algebraicznymi.

Przykładem jest następująca tożsamość:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Dowód polega na zliczaniu dwoma sposobami ciągów zerojedynkowych długości $2n$ mających n jedynek. Z jednej strony jest ich oczywiście $\binom{2n}{n}$. To jest prawa strona wzoru. Z drugiej strony patrzymy na liczbę jedynek wśród pierwszych n wyrazów ciągu — jest to liczba od 0 do n. Jeśli wśród pierwszych n wyrazów ciągu jest k jedynek, to wśród ostatnich n wyrazów jest $n-k$ jedynek. Istnieje $\binom{n}{k}$ ciągów mających k jedynek i $\binom{n}{n-k}$, czyli $\binom{n}{k}$ ciągów mających $n-k$ jedynek. Musimy wziąć dwa ciągi: jeden mający k jedynek i jeden mający

$n-k$ jedynek. Reguła mnożenia mówi, że możemy to zrobić na $\binom{n}{k}^2$ sposobów. Reguła dodawania mówi z kolei, że te liczby mamy dodać; to daje lewą stronę wzoru.

Oczywiście istnieje także dowód rachunkowy tej tożsamości. Nie polecam szukania bezpośredniego dowodu powyższej tożsamości przez indukcję. Łatwiej będzie udowodnić tożsamość ogólniejszą, zwaną tożsamością Cauchy'ego–Vandermonde'a:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

dla dowolnych liczb m, n i k. Wyjaśnienia wymaga tylko, co to znaczy $\binom{n}{k}$ dla $k>n$, co w tej tożsamości może się zdarzyć (najprościej przyjąć, tak jak się to zwykle robi, że $\binom{n}{k}=0$ dla $k<0$ oraz dla $k>n$). Tego dowodu raczej nie przeprowadzałbym w szkole; dowód kombinatoryczny można pokazać uczniom liceum.

5.7. Wzory arytmetyczne

W tym rozdziale udowodnimy trzy wzory, z których często korzystamy w zadaniach. Są to mianowicie wzory:

$$\begin{aligned}1+2+\ldots+n&=\frac{n(n+1)}{2},\\1^2+2^2+\ldots+n^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\1^3+2^3+\ldots+n^3&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Istnieje wiele sposobów dowodzenia tych wzorów. Sposób, który pokażę, na pewno nie jest najprostszy. Ma on jednak tę wartość, że pokazuje znaczenie symboli występujących we wzorach. Inaczej mówiąc, nadaje kombinatoryczny sens tym wzorom.

Zadanie 51.

Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z par (i,j) takich, że $1\leqslant i<j\leqslant n+1$.

Udowodnij, że wówczas $|A|=1+2+\ldots+n$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli $(i,j)\in A$, to $2\leqslant j\leqslant n+1$. Definiujemy teraz n czynności:

- czynność pierwsza polega na wybraniu pary postaci $(i,2)$,
- czynność druga polega na wybraniu pary postaci $(i,3)$,
- czynność trzecia polega na wybraniu pary postaci $(i,4)$,

- ...
- czynność przedostatnia polega na wybraniu pary postaci (i,n),
- czynność ostatnia polega na wybraniu pary postaci $(i,n+1)$.

Wykonujemy teraz jedną z tych n czynności. W ten sposób możemy otrzymać parę ze zbioru A; co więcej, każda para ze zbioru A jest wynikiem którejś z tych czynności. Zauważmy następnie, że pierwsza czynność kończy się jednym możliwym wynikiem (jest nim para $(1,2)$), druga czynność kończy się jednym z dwóch wyników (są to pary $(1,3)$ i $(2,3)$), trzecia czynność kończy się jednym z trzech wyników (są to pary $(1,4)$, $(2,4)$ i $(3,4)$) i tak dalej. Ostatnia czynność kończy się jednym z n wyników (są to pary $(1,n+1),(2,n+1),\ldots,(n,n+1)$). Ogólnie, k-ta czynność kończy się jednym z k wyników (są to pary $(1,k+1),(2,k+1),\ldots,(k,k+1)$). Oczywiście żaden wynik którejkolwiek czynności nie jest wynikiem innej czynności (otrzymane pary różnią się bowiem drugą liczbą). Stąd wynika, że wykonanie jednej z tych czynności kończy się jednym z $1+2+\ldots+n$ wyników, a więc $|A|=1+2+\ldots+n$.

Twierdzenie 6. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Dowód

Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z par (i,j) takich, że $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

Z zadania 51 wynika, że $|A|=1+2+\ldots+n$. Z zadania 47 wynika, że $|A|=|S_2(n+1)|=\dfrac{n(n+1)}{2}$. To kończy dowód twierdzenia. □

Zadanie 52.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Definiujemy następujące dwa zbiory A i B:

- zbiór A składa się z trójek (i,j,k) takich, że $1 \leqslant i,j \leqslant k \leqslant n$.
- zbiór B składa się z trójek (i,j,k) takich, że $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant 2n$.

Udowodnij, że $\quad 4\cdot|A|=|B|$.

Rozwiązanie

Weźmy trójkę (i,j,k). Wówczas

- jeśli $i \leqslant j$, to trójkę (i,j,k) łączymy w pary z następującymi czterema trójkami:

$$(2i,2j,2k),\qquad (2i-1,2j,2k),\qquad (2i-1,2j-1,2k),\qquad (2i-1,2j-1,2k-1),$$

- jeśli $i > j$, to trójkę (i,j,k) łączymy w pary z następującymi czterema trójkami:

$$(2j,2i-1,2k),\qquad (2j,2i-1,2k-1),\qquad (2j,2i-2,2k-1),\qquad (2j-1,2i-2,2k-1).$$

Popatrzmy na przykład. Niech $n=3$. Zbiór A składa się wtedy z następujących trójek liczb:

111								
112	122	212	222					
113	123	133	213	223	233	313	323	333

Zbiór B składa się z następujących trójek liczb:

111	112	113	114	115	116		222	223	224	225	226		333	334	335	336
122	123	124	125	126			233	234	235	236			344	345	346	
133	134	135	136				244	245	246				355	356		
144	145	146					255	256					366			
155	156						266									
166																

444	445	446		555	556		666
455	456			566			
466							

A oto jak wygląda łączenie w pary (w pierwszej kolumnie mamy trójki ze zbioru A, w następnych czterech kolumnach znajdują się trójki połączone w parę z trójką z pierwszej kolumny):

111	222	122	112	111
112	224	124	114	113
122	244	144	134	133
212	234	233	223	123
222	444	344	334	333
113	226	126	116	115
123	246	146	136	135
133	266	166	156	155
213	236	235	225	125
223	446	346	336	335
233	466	366	356	355
313	256	255	245	145
323	456	455	445	345
333	666	566	556	555

Znów sprawdzenie, że każda trójka (i,j,k) ze zbioru A występuje w dokładnie czterech parach i każda trójka ze zbioru B występuje w dokładnie jednej parze, jest nietrudnym ćwiczeniem. To dowodzi, że w zbiorze B jest cztery razy więcej elementów niż w zbiorze A.

Zadanie 53.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z trójek (i,j,k) takich, że $1 \leqslant i,j \leqslant k \leqslant n$.

Udowodnij, że $|A| = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli $(i,j,k) \in A$, to $1 \leqslant k \leqslant n$. Definiujemy teraz n czynności:

- czynność pierwsza polega na wybraniu trójki postaci $(i,j,1)$,
- czynność druga polega na wybraniu trójki postaci $(i,j,2)$,
- czynność trzecia polega na wybraniu trójki postaci $(i,j,3)$,
- ...

- czynność przedostatnia polega na wybraniu trójki postaci $(i, j, n-1)$,
- czynność ostatnia polega na wybraniu trójki postaci (i, j, n).

Wykonujemy teraz jedną z tych n czynności. W ten sposób możemy otrzymać trójkę ze zbioru A; co więcej, każda trójka ze zbioru A jest wynikiem którejś z tych czynności. Zauważmy następnie, że pierwsza czynność kończy się jednym możliwym wynikiem (jest nim trójka $(1,1,1)$), druga czynność kończy się jednym z czterech wyników (są to trójki $(1,1,2)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ i $(2,2,2)$), trzecia czynność kończy się jednym z dziewięciu wyników (są to trójki $(1,1,3)$, $(1,2,3)$ $(1,3,3)$, $(2,1,3)$, $(2,2,3)$, $(2,3,3)$, $(3,1,3)$, $(3,2,3)$ i $(3,3,3)$) i tak dalej. Ostatnia czynność kończy się jednym z n^2 wyników (są to trójki (i, j, n), gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$). Ogólnie, k-ta czynność kończy się jednym z k^2 wyników (tymi wynikami są trójki (i, j, k), gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant k$). Oczywiście żaden wynik którejkolwiek czynności nie jest wynikiem innej czynności (otrzymane trójki różnią się bowiem trzecią liczbą). Stąd wynika, że wykonanie jednej z tych czynności kończy się jednym z $1^2+2^2+\ldots+n^2$ wyników, a więc $|A| = 1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Twierdzenie 7. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dowód

Definiujemy następujące dwa zbiory A i B:

- zbiór A składa się z trójek (i, j, k) takich, że $1 \leqslant i, j \leqslant k \leqslant n$.
- zbiór B składa się z trójek (i, j, k) takich, że $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant 2n$.

Z zadania 53 wynika, że $|A| = 1^2+2^2+\ldots+n^2$. Z zadania 52 wynika, że $4 \cdot |A| = |B|$. Z zadania 11 wynika, że $|B| = |S_3(2n+2)|$. Wreszcie z zadania 48 wynika, że $|S_3(2n+2)| = \dfrac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}$. Łącznie dostajemy:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

To kończy dowód twierdzenia. □

Zadanie 54.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Definiujemy następujące dwa zbiory A i B:

- zbiór A składa się z czwórek (i, j, k, m) takich, że $1 \leqslant i, j, k < m \leqslant n+1$.
- zbiór B składa się z czwórek (i, j, k, m) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ oraz $1 \leqslant k < m \leqslant n+1$.

Udowodnij, że $|A| = |B|$.

Rozwiązanie

Weźmy czwórkę (i, j, k, m). Wówczas:

- jeśli $i < j$, to czwórkę (i, j, k, m) łączymy w parę z czwórką (i, j, k, m),
- jeśli $i > j$, to czwórkę (i, j, k, m) łączymy w parę z czwórką (k, m, j, i),
- jeśli $i = j$, to czwórkę (i, j, k, m) łączymy w parę z czwórką (i, m, k, m).

Popatrzmy na przykład. Niech $n=3$. Zbiór A składa się wtedy z następujących ciągów długości 4:

1112								
1113	1123	1213	1223	2113	2123	2213	2223	
1114	1124	1134	1214	1224	1234	1314	1324	1334
2114	2124	2134	2214	2224	2234	2314	2324	2334
3114	3124	3134	3214	3224	3234	3314	3324	3334

Zbiór B składa się zaś z ciągów:

1212	1213	1214	1223	1224	1234
1312	1313	1314	1323	1324	1334
1412	1413	1414	1423	1424	1434
2312	2313	2314	2323	2324	2334
2412	2413	2414	2423	2424	2434
3412	3413	3414	3423	3424	3434

Łączenie w pary wygląda teraz następująco:

(1112, 1212)	(1114, 1414)	(2114, 1412)	(3114, 1413)
(1113, 1313)	(1124, 1424)	(2124, 2412)	(3124, 2413)
(1123, 1323)	(1134, 1434)	(2134, 3412)	(3134, 3413)
(1213, 1213)	(1214, 1214)	(2214, 2414)	(3214, 1423)
(1223, 1223)	(1224, 1224)	(2224, 2424)	(3224, 2423)
(2113, 1312)	(1234, 1234)	(2234, 2434)	(3234, 3423)
(2123, 2312)	(1314, 1314)	(2314, 2314)	(3314, 3414)
(2213, 2313)	(1324, 1324)	(2324, 2324)	(3324, 3424)
(2223, 2323)	(1334, 1334)	(2334, 2334)	(3334, 3434)

Sprawdzenie, że spełnione są warunki (R1), (R2) i (R3) sformułowane w zasadzie równoliczności, pozostawię jako ćwiczenie.

Zadanie 55.

Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Definiujemy zbiór A w następujący sposób:

- zbiór A składa się z czwórek (i,j,k,m) takich, że $1 \leqslant i,j,k < m \leqslant n+1$.

Udowodnij, że $|A| = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli $(i,j,k,m) \in A$, to $2 \leqslant m \leqslant n+1$. Definiujemy teraz n czynności:

- czynność pierwsza polega na wybraniu czwórki postaci $(i,j,k,2)$,
- czynność druga polega na wybraniu czwórki postaci $(i,j,m,3)$,
- czynność trzecia polega na wybraniu czwórki postaci $(i,j,m,4)$,
- ...
- czynność przedostatnia polega na wybraniu czwórki postaci (i,j,m,n),
- czynność ostatnia polega na wybraniu czwórki postaci $(i,j,m,n+1)$.

Wykonujemy teraz jedną z tych n czynności. W ten sposób możemy otrzymać czwórkę ze zbioru A; co więcej, każda czwórka ze zbioru A jest wynikiem którejś z tych czynności. Zauważmy następnie, że pierwsza czynność kończy się jednym możliwym wynikiem (jest nim czwórka $(1,1,1,2)$), druga czynność kończy się jednym z ośmiu wyników (są to czwórki $(1,1,1,3)$, $(1,1,2,3)$, $(1,2,1,3)$, $(1,2,2,3)$, $(2,1,1,3)$, $(2,1,2,3)$, $(2,2,1,3)$ i $(2,2,2,3)$), trzecia czynność kończy się jednym z 27 wyników (są to czwórki $(i,j,k,4)$, gdzie $1 \leqslant i,j,k \leqslant 3$) i tak dalej. Ostatnia czynność kończy się jednym z n^3 wyników (są to czwórki $(i,j,k,n+1)$, gdzie $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$). Ogólnie, l-ta czynność kończy się jednym z l^2 wyników (tymi wynikami są czwórki $(i,j,k,l+1)$, gdzie $1 \leqslant i,j,k \leqslant l$). Oczywiście żaden wynik którejkolwiek czynności nie jest wynikiem innej czynności (otrzymane czwórki różnią się bowiem czwartą liczbą). Stąd wynika, że wykonanie jednej z tych czynności kończy się jednym z $1^3+2^3+\ldots+n^3$ wyników, a więc $|A| = 1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Twierdzenie 8. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Dowód

Definiujemy następujące cztery zbiory A, B, C i D:

- zbiór A składa się z czwórek (i,j,k,m) takich, że $1 \leqslant i,j,k < m \leqslant n+1$,
- zbiór B składa się z czwórek (i,j,k,m) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$ oraz $1 \leqslant k < m \leqslant n+1$,
- zbiór C składa się z par (i,j) takich, że $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$,
- zbiór D składa się z par (x,y) takich, że x i y są parami należącymi do zbioru C.

Z zadania 55 wynika, że $|A| = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. Z zadania 54 wynika, że $|A| = |B|$. Z zadania 10 wynika, że $|C| = |S_2(n+1)|$. Z zadania 47 wynika, że $|S_2(n+1)| = \frac{n(n+1)}{2}$. Oznaczmy $c = \frac{n(n+1)}{2}$. Teraz z zadania 30 (dla $m = c$ i $n = 2$) wynika, że zbiór D ma c^2 elementów. Wreszcie pokazujemy, że zbiory B i D mają tyle samo elementów. W tym celu czwórkę (i,j,k,m) ze zbioru B łączymy w parę z parą (x,y) ze zbioru D, gdzie:

$$x = (i,j), \qquad y = (k,m).$$

Sprawdzenie własności (R1), (R2) i (R3) zostawię jako ćwiczenie.

Łącznie dostajemy:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3 = |A| = |B| = |D| = c^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

To kończy dowód twierdzenia. □

5.8. Dodatki

5.8.1. Zasada włączeń i wyłączeń

W tym dodatku pokażę dwa dowody wzoru włączeń i wyłączeń. Pierwszy dowód korzysta ze wzoru dla dwóch zbiorów:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Teraz dowodzimy wzoru na liczbę elementów sumy trzech zbiorów:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \big(|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|\big) = \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |(A \cap C) \cap (B \cap C)| = \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

W tym dowodzie korzystaliśmy z następujących dwóch tożsamości rachunku zbiorów:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
(A \cap C) \cap (B \cap C) &= A \cap B \cap C.
\end{aligned}$$

Oba dowody można łatwo przeprowadzić za pomocą diagramów Venna.

W podobny sposób możemy udowodnić wzór włączeń i wyłączeń dla czterech zbiorów. Teraz będziemy korzystać ze wzoru włączeń i wyłączeń dla dwóch i dla trzech zbiorów. A oto dowód. Najpierw korzystamy ze wzoru dla dwóch zbiorów:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = |(A \cup B \cup C) \cup D| &= |A \cup B \cup C| + |D| - |(A \cup B \cup C) \cap D| = \\
&= |A \cup B \cup C| + |D| - |(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)|.
\end{aligned}$$

Teraz dwukrotnie korzystamy ze wzoru włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

oraz

$$\begin{aligned}
&|(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)| = \\
&= |A \cap D| + |B \cap D| + |C \cap D| - |(A \cap D) \cap (B \cap D)| - |(A \cap D) \cap (C \cap D)| - |(B \cap D) \cap (C \cap D)| + \\
&\quad + |(A \cap D) \cap (B \cap D) \cap (C \cap D)| = \\
&= |A \cap D| + |B \cap D| + |C \cap D| - |A \cap B \cap D| - |A \cap C \cap D| - |B \cap C \cap D| + |A \cap B \cap C \cap D|.
\end{aligned}$$

Łącząc ostatnio otrzymane wzory, otrzymujemy wzór włączeń i wyłączeń dla czterech zbiorów:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\
& + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|.
\end{aligned}$$

W tym dowodzie korzystaliśmy, oprócz wymienionych wyżej, z następujących tożsamości rachunku zbiorów:

$$(A \cup B \cup C) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D),$$
$$(A \cap D) \cap (B \cap D) \cap (C \cap D) = A \cap B \cap C \cap D.$$

Dowody tych tożsamości także można przeprowadzić za pomocą diagramów Venna (o diagramach Venna dla czterech zbiorów pisałem wcześniej).

Nietrudno zauważyć, że te dwa dowody można uogólnić, to jednak wymaga zastosowania indukcji. Oto ten dowód.

Twierdzenie 9. Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są zbiorami skończonymi, to

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} \Big| \bigcap_{j \in T} A_j \Big|.$$

Dowód

Wprowadźmy oznaczenie. Dla dowolnych zbiorów $B_1, \ldots, B_m$ niech:

$$S_k(B_1, \ldots, B_m) = \sum_{T \in P_k(m)} \Big| \bigcap_{j \in T} B_j \Big|.$$

Teza twierdzenia przybiera wtedy postać:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n).$$

Twierdzenia dowodzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ twierdzenie jest oczywiste. Dla $n = 2$ i $n = 3$ było już udowodnione. Zakładamy teraz, że dla dowolnych n zbiorów (gdzie $n \geqslant 2$) twierdzenie jest prawdziwe i dowodzimy, że jest prawdziwe dla dowolnych $n+1$ zbiorów. Niech więc $A_1, \ldots, A_{n+1}$ będą dowolnymi zbiorami skończonymi. Wówczas

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = \\
&= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = \\
&= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})|.
\end{aligned}$$

Korzystamy teraz dwukrotnie z założenia indukcyjnego dla n zbiorów: dla zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ oraz dla zbiorów $A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}$:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1, \ldots, A_n),$$
$$|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1 \cap A_{n+1}, \ldots, A_n \cap A_{n+1}).$$

Zauważmy następnie, że

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup\ldots\cup A_n|+|A_{n+1}| &= S_1(A_1,\ldots,A_n)+|A_{n+1}|+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ldots,A_n)=\\
&=|A_1|+\ldots+|A_n|+|A_{n+1}|+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ldots,A_n)=\\
&=S_1(A_1,\ldots,A_{n+1})+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ldots,A_n)
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&|(A_1\cap A_{n+1})\cup\ldots\cup(A_n\cap A_{n+1})| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})=\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}S_k(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})+(-1)^{n+1}S_n(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})=\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}S_k(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})+(-1)^{n+1}|(A_1\cap A_{n+1})\cap\ldots\cap(A_n\cap A_{n+1})|=\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}S_k(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})+(-1)^{n+1}|A_1\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1}|=\\
&=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})-(-1)^{n+2}|A_1\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1}|=\\
&=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})-(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1})=\\
&=-\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})-(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
&|A_1\cup\ldots\cup A_n| = S_1(A_1,\ldots,A_{n+1})+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_k(A_1,\ldots,A_n)+\\
&\qquad+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})+(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1})=\\
&=S_1(A_1,\ldots,A_{n+1})+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}(S_k(A_1,\ldots,A_n)+S_{k-1}(A_1,\ldots,A_{n+1}))+\\
&\qquad\qquad+(-1)^{n+2}S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Następnie zauważmy, że

$$
S_k(A_1,\ldots,A_n)+S_{k-1}(A_1\cap A_{n+1},\ldots,A_n\cap A_{n+1})=S_k(A_1,\ldots,A_{n+1})
$$

Stąd ostatecznie dostajemy

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \\
&= S_1(A_1,\ldots,A_{n+1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} S_k(A_1,\ldots,A_{n+1}) + (-1)^{n+2} S_{n+1}(A_1,\ldots,A_{n+1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} S_k(A_1,\ldots,A_{n+1}),
\end{aligned}
$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Pokażę teraz dowód kombinatoryczny wzoru włączeń i wyłączeń.

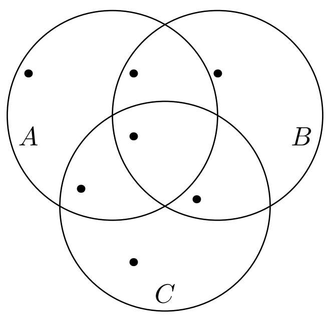
Mamy udowodnić równość

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

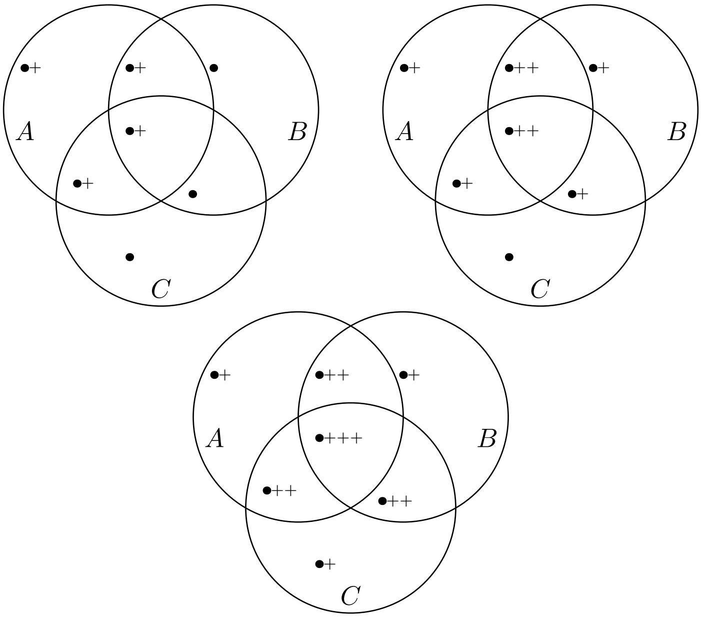
Przeglądamy kolejno 7 zbiorów występujących po prawej stronie wzoru. Przy każdym elemencie kolejno rozpatrywanych zbiorów stawiamy jeden znak: plus lub minus. Jeśli rozpatrywany zbiór występuje we wzorze ze znakiem $+$, to przy każdym jego elemencie piszemy znak plus; jeśli zaś ten zbiór występuje we wzorze ze znakiem $-$, to przy każdym jego elemencie piszemy znak minus. Te znaki pokazują, ile razy dany element był liczony po prawej stronie. Wykażemy, że przy każdym elemencie sumy zbiorów $A \cup B \cup C$ liczba plusów jest o 1 większa od liczby minusów. To znaczy, że każdy element tej sumy ostatecznie był liczony po prawej stronie dokładnie jeden raz, a więc prawa strona jest równa liczbie elementów sumy.

Tę procedurę zilustrujemy serią rysunków.

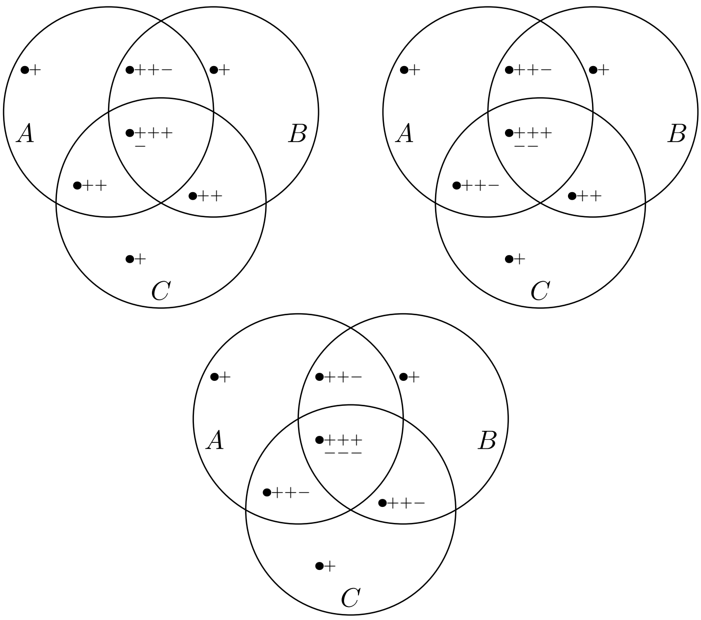
Rysunek 1: zbiory A, B i C wraz z zaznaczonymi przykładowymi elementami (po jednym elemencie w każdej składowej).



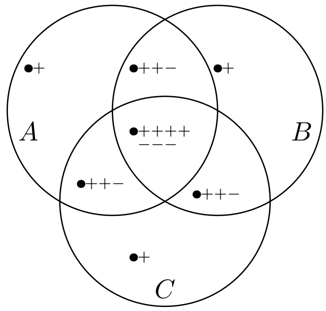
Rysunki 2, 3 i 4: najpierw przy każdym elemencie zbioru A rysujemy znak plus, potem przy każdym elemencie zbioru B rysujemy znak plus, a następnie przy każdym elemencie zbioru C rysujemy znak plus.



Rysunki 5, 6 i 7: przy każdym elemencie zbioru $A \cap B$ rysujemy znak minus, potem przy każdym elemencie zbioru $A \cap C$ rysujemy znak minus, a następnie przy każdym elemencie zbioru $B \cap C$ rysujemy znak minus.



Rysunek 8: przy każdym elemencie zbioru $A \cap B \cap C$ rysujemy znak plus



Zauważamy, że rzeczywiście przy każdym elemencie sumy $A \cup B \cup C$ liczba narysowanych plusów jest o jeden większa od liczby narysowanych minusów: przy elementach należących do jednego zbioru narysowaliśmy tylko jeden plus, przy elementach należących do dwóch zbiorów narysowaliśmy dwa plusy i jeden minus, wreszcie przy elementach należących do wszystkich trzech zbiorów narysowaliśmy cztery plusy i trzy minusy. To daje równość

$$(\text{liczba plusów}) - (\text{liczba minusów}) = |A \cup B \cup C|.$$

Nietrudno przy tym zauważyć, że w każdym z siedmiu powyższych kroków liczba narysowanych znaków była równa liczbie elementów rozpatrywanego zbioru. Stąd dostajemy równość

$$(\text{liczba plusów}) - (\text{liczba minusów}) = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

z której wynika wzór włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorow.

To, że przy każdym elemencie sumy $A \cup B \cup C$ liczba plusów jest o 1 większa od liczby minusów, można wykazać bez odwoływania się do rysunków. Popatrzmy teraz na takie rozumowanie. Niech x będzie dowolnym elementem sumy $A \cup B \cup C$. Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. Element x należy do dokładnie jednego z trzech zbiorów A, B, C.

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że x należy do zbioru A i nie należy do zbiorów B i C. Wówczas przy x napisaliśmy tylko jeden znak plus; miało to miejsce przy rozpatrywaniu zbioru A.

Przypadek 2. Element x należy do dokładnie dwóch zbiorów.

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że x należy do zbiorów A i B oraz nie należy do zbioru C. Wówczas przy x napisaliśmy dwa znaki plus (przy rozpatrywaniu zbiorów A i B) oraz jeden znak minus (przy rozpatrywaniu zbioru $A \cap B$).

Przypadek 3. Element x należy do trzech zbiorów.

Wówczas przy x napisaliśmy 4 znaki plus (przy rozpatrywaniu zbiorów A, B, C i $A \cap B \cap C$) i trzy znaki minus (przy rozpatrywaniu zbiorów $A \cap B$, $A \cap C$ i $B \cap C$).

W całej ogólności dowód kombinatoryczny twierdzenia 9 polega także na przeglądaniu kolejno składników sumy stojącej po prawej stronie równości i zapisywaniu przy każdym elemencie zbioru $\bigcap_{j \in T} A_j$ znaku plus lub minus w zależności od tego, czy liczba $\left|\bigcap_{j \in T} A_j\right|$ występowała w sumie ze znakiem plus czy minus. Inaczej mówiąc, jeśli zbiór T ma nieparzystą liczbę elementów, to piszemy znak plus; jeśli zaś zbiór T ma parzystą liczbę elementów, to piszemy znak minus.

Prawa strona równości występującej w tezie twierdzenia 9 jest różnicą między liczbą plusów i liczbą minusów. Wystarczy zatem pokazać, że przy każdym elemencie sumy zbiorów $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ narysowaliśmy o jeden plus więcej. Niech $x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Niech następnie

$$M = \{j : \ x \in A_j\}.$$

Inaczej mówiąc, $x \in A_j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j \in M$. Oznaczmy $m = |M|$; oczywiście $m \geqslant 1$. Niech teraz $T \in P_k(n)$ i popatrzmy na zbiór $\bigcap\limits_{j \in T} A_j$; jest to jeden ze zbiorów występujących po prawej stronie równości. Jeśli $T \setminus M \neq \emptyset$, to oczywiście mamy $x \notin \bigcap\limits_{j \in T} A_j$. Przypuśćmy zatem, że $T \subseteq M$. Wtedy przy elemencie x rysowaliśmy znak plus lub minus, w zależności od parzystości k: plus dla nieparzystych k, minus dla parzystych k. Dla danego k liczba takich zbiorów T jest równa $\binom{m}{k}$. Liczby plusów i minusów narysowanych przy x są zatem równe

$$\begin{aligned}(\text{liczba plusów}) &= \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots\\ (\text{liczba minusów}) &= \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \binom{m}{6} + \ldots\end{aligned}$$

skąd dostajemy

$$\begin{aligned}&(\text{liczba plusów}) - (\text{liczba minusów}) =\\ &\qquad = \left(\binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots\right) - \left(\binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \binom{m}{6} + \ldots\right).\end{aligned}$$

Z twierdzenia 5 (przypominam, że $m \geqslant 1$) dostajemy:

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots = \binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \binom{m}{6} + \ldots$$

Stąd wynika, że

$$\left(\binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots\right) - \left(\binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \binom{m}{6} + \ldots\right) = \binom{m}{0} = 1.$$

To znaczy, że przy elemencie x narysowaliśmy o jeden plus więcej. Tak jest dla każdego elementu x sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$. To zaś oznacza, że suma po prawej stronie równości będzie równa liczbie elementów sumy $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, co kończy dowód twierdzenia 9.

5.8.2. Wzór dwumianowy Newtona

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Wówczas dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi równość

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Dowód

Przeprowadzimy dowód twierdzenia w trzech krokach. W kroku pierwszym zastosujemy rozumowanie kombinatoryczne. W kroku drugim zastosujemy znane twierdzenie dotyczące wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej. Wreszcie w kroku trzecim udowodnimy tezę twierdzenia za pomocą prostych przekształceń algebraicznych.

Krok 1.

Przyjmijmy, że dane są dwie liczby naturalne $m, n \geqslant 1$. Udowodnimy, że wówczas prawdziwa jest równość

$$(m+1)^n = \binom{n}{n} \cdot m^n + \binom{n}{n-1} \cdot m^{n-1} + \binom{n}{n-2} \cdot m^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2} \cdot m^2 + \binom{n}{1} \cdot m^1 + \binom{n}{0} \cdot m^0.$$

Definiujemy następujący zbiór A:

- zbiór A składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ takich, że $1 \leqslant a_1, \ldots, a_n \leqslant m+1$.

Z zadania 28 wynika, że $|A| = (m+1)^n$. Definiujemy następnie zbiory $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ w następujący sposób. Zbiór A_k (gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$) składa się z tych ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$, które mają dokładnie k wyrazów równych $m+1$. Obliczmy, ile elementów ma zbiór A_k. Zastanówmy się w tym celu, ile różnych ciągów należących do zbioru A_k możemy utworzyć.

Najpierw wybieramy k liczb spośród $1, 2, \ldots, n$. To możemy zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Następnie dla każdej liczby j spośrod k wybranych liczb przyjmujemy $a_j = m+1$. Wreszcie dla każdej z niewybranych $n-k$ liczb j wybieramy liczbę a_j ze zbioru $[m]$; z zadania 28 wynika, że to możemy zrobić na m^{n-k} sposobów. Łącznie w ten sposób tworzymy $\binom{n}{k} \cdot m^{n-k}$ ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$. Stąd wynika, że

$$|A_k| = \binom{n}{k} \cdot m^{n-k}$$

dla $k = 0, \ldots, n$.

Zauważamy następnie, że

$$A = A_n \cup A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup \ldots \cup A_2 \cup A_1 \cup A_0$$

oraz wszystkie zbiory po prawej stronie są parami rozłączne. Stąd wynika, że

$$|A| = |A_n| + |A_{n-1}| + |A_{n-2}| + \ldots + |A_2| + |A_1| + |A_0|,$$

czyli

$$(m+1)^n = \binom{n}{n} m^n + \binom{n}{n-1} m^{n-1} + \binom{n}{n-2} m^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2} m^2 + \binom{n}{1} m^1 + \binom{n}{0} m^0.$$

W ten sposób krok 1 został zrealizowany. Teraz pora na algebrę.

Przypominam, że wielomianem stopnia n nazywamy dowolną funkcję $W(x)$ postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a_n \neq 0$. Będziemy korzystać z następujących własności wielomianów:

1. Iloczyn wielomianów (po wykonaniu mnożenia i uporządkowaniu wyrazów) jest wielomianem. Stopień iloczynu jest sumą stopni czynników.

2. Funkcja $W(x)=(x+1)^n$ jest wielomianem stopnia n.

3. Jeśli wartości dwóch wielomianów $W(x)$ i $V(x)$ stopnia n są równe dla co najmniej $n+1$ (w szczególności dla nieskończenie wielu) różnych argumentów rzeczywistych, to są równe dla wszystkich argumentów rzeczywistych. Zatem, jeśli

$$W(x_1)=V(x_1), \quad W(x_2)=V(x_2), \quad \ldots, \quad W(x_n)=V(x_n), \quad W(x_{n+1})=V(x_{n+1}),$$

gdzie wszystkie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ są różne, to $W(x)=V(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Krok 2.

Przyjmijmy, że dana jest liczba naturalna $n \geqslant 1$. Udowodnimy, że wówczas prawdziwa jest równość

$$(x+1)^n = \binom{n}{n}\cdot x^n + \binom{n}{n-1}\cdot x^{n-1} + \binom{n}{n-2}\cdot x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2}\cdot x^2 + \binom{n}{1}\cdot x^1 + \binom{n}{0}$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Ustalamy liczbę naturalną $n \geqslant 1$. Definiujemy dwa wielomiany stopnia n:

$$W(x)=(x+1)^n$$

oraz

$$V(x) = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}.$$

Wtedy z kroku 1 wynika, że dla każdej liczby naturalnej m mamy równość $W(m)=V(m)$. Zatem dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $W(x)=V(x)$, czyli

$$(x+1)^n = \binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{0}.$$

Krok 3.

Ustalmy teraz liczby rzeczywiste a i b. Przypuśćmy najpierw, że $b \neq 0$. Niech wówczas $x=\frac{a}{b}$. Z kroku 2 wynika, że

$$(x+1)^n = \binom{n}{n}\cdot x^n + \binom{n}{n-1}\cdot x^{n-1} + \binom{n}{n-2}\cdot x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2}\cdot x^2 + \binom{n}{1}\cdot x^1 + \binom{n}{0},$$

czyli

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^n = \binom{n}{n}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n + \binom{n}{n-1}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \binom{n}{n-2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} +$$
$$+ \ldots + \binom{n}{2}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \binom{n}{1}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^1 + \binom{n}{0}.$$

Przekształcamy otrzymaną równość:

$$\left(\frac{a+b}{b}\right)^n = \binom{n}{n}\cdot\frac{a^n}{b^n} + \binom{n}{n-1}\cdot\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \binom{n}{n-2}\cdot\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \ldots + \binom{n}{2}\cdot\frac{a^2}{b^2} + \binom{n}{1}\cdot\frac{a}{b} + \binom{n}{0},$$

czyli

$$\frac{(a+b)^n}{b^n}=\binom{n}{n}\cdot\frac{a^n}{b^n}+\binom{n}{n-1}\cdot\frac{a^{n-1}b}{b^n}+\binom{n}{n-2}\cdot\frac{a^{n-2}b^2}{b^n}+$$
$$+\ldots+\binom{n}{2}\cdot\frac{a^2b^{n-2}}{b^n}+\binom{n}{1}\cdot\frac{ab^{n-1}}{b^n}+\binom{n}{0}\cdot\frac{b^n}{b^n}.$$

Po pomnożeniu obu stron ostatniej równości przez b^n, otrzymamy tezę twierdzenia.

Wreszcie wystarczy zauważyć, że dla $b=0$ teza jest oczywista. To kończy dowód twierdzenia.

$\square$

Rozdział 6

O rozwiązywaniu zadań z rachunku prawdopodobieństwa

Edward Stachowski
konsultacja: Anna Olechnowicz

Wstęp

1. Przed wprowadzeniem na lekcjach treści programowych z teorii prawdopodobieństwa niezbędne jest wcześniejsze omówienie zagadnień dotyczących elementów kombinatoryki w zakresie przewidzianym dla danego poziomu nauczania. Kombinatoryka jest to dział matematyki wykorzystywany często w teorii prawdopodobieństwa. Zapoznanie uczniów z elementami kombinatoryki w ramach teorii prawdopodobieństwa prowadzi do sytuacji, którą mamy aktualnie — większość uczniów nie rozumie kombinatoryki i nie umie rachunku prawdopodobieństwa.
2. „Szkolna" teoria prawdopodobieństwa jest znacznie trudniejsza od „akademickiej".
„Akademicka" teoria prawdopodobieństwa zaczyna się od podania modelu:
dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, F, P) ....
W „szkolnej" teorii prawdopodobieństwa w wielu zadaniach opisane jest doświadczenie losowe i podany problem z nim związany. Dla tego doświadczenia i podanego problemu musimy zbudować model probabilistyczny i to na ogół sprawia wiele kłopotów.
Koniecznie należy pamiętać o tym, że dla danego doświadczenia losowego, w wielu przypadkach, model można zbudować na kilka sposobów, czyli Ω nie jest jednoznacznie wyznaczona przez doświadczenie losowe. Np. model zbudowany za pomocą drzewa jest często różny od modelu klasycznego.

Pojęciem pierwotnym teorii prawdopodobieństwa jest **zdarzenie elementarne**.

Jak wiadomo, pojęcia pierwotnego nie definiuje się, jednak przy rozwiązywaniu zadań, budując model, musimy zdecydować, co w danym doświadczeniu losowym jest zdarzeniem elementarnym.

Proponujemy następujący sposób postępowania.

Analizujemy doświadczenie losowe i sporządzamy listę jego możliwych wyników, tak aby lista ta spełniała następujące warunki:

1. Ma być kompletna, tzn. doświadczenie nie może zakończyć się wynikiem, którego nie ma na liście,
2. Elementy listy muszą być parami rozłączne, tzn. każdy wynik umieszczony na liście musi wykluczać wszystkie inne wyniki tej listy.

Elementy tak sporządzonej listy przyjmujemy za zdarzenia elementarne.

Pamiętamy o postulacie rozróżnialności:

Jeżeli jest kilka monet o tym samym nominale, kilka sześciennych kostek do gry, kilka kul tego samego koloru (ogólnie kilka elementów tego samego rodzaju „optycznie nierozróżnialnych”), to w naszych rozważaniach będą one **zawsze rozróżnialne**, to znaczy ponumerowane. Umawiamy się, że jest element pierwszy, element drugi, ...

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczamy symbolem Ω.

Zdarzeniem losowym nazywamy każdy podzbiór skończonego zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych.

Prawdopodobieństwo jest to funkcja P, określona na wszystkich zdarzeniach losowych zawartych w danym zbiorze Ω, spełniająca następujące warunki:

1. Dla każdego zdarzenia losowego A jest $P(A) \geqslant 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Dla każdej pary zdarzeń rozłącznych A, B, jest $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Podstawowe własności prawdopodobieństwa

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Jeżeli $A \subset B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
3. Jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$.
4. Dla każdego A, $P(A) \leqslant 1$.
5. $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie A' to zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ważną konsekwencją własności 4 oraz 6 jest nierówność $P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

Twierdzenie. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem skończonym i wszystkie zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Wyróżniamy następujące typowe doświadczenia losowe:

1. W doświadczeniu polegającym na losowaniu po jednym elemencie z każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$, zdarzeniami elementarnymi są wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ takie, że $x_i \in A_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jest to model klasyczny i $|\Omega| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|$.
2. W doświadczeniu polegającym na k-krotnym losowaniu po jednym elemencie ze zwracaniem ze zbioru A, zdarzeniami elementarnymi są wszystkie funkcje $f \colon \{1, 2, \ldots, k\} \to A$, lub równoważnie wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ takie, że $x_i \in A_i$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, lub równoważnie wszystkie k-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru A; jest to model klasyczny i jeżeli $|A| = n$, to $|\Omega| = n^k$.
3. W doświadczeniu polegającym na k-krotnym losowaniu po jednym elemencie bez zwracania ze zbioru A, takiego, że $|A| = n$ i $k \leqslant n$, zdarzeniami elementarnymi są wszystkie funkcje różnowartościowe $f \colon \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ lub równoważnie wszystkie ciągi różnowar-

tościowe $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ takie, że $x_i \in A$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ lub równoważnie wszystkie k-elementowe wariacje bez powtórzeń zbioru A; jest to model klasyczny i

$$|\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

4. W doświadczeniu polegającym na porządkowaniu wszystkich elementów takiego zbioru A, że $|A| = n$, zdarzeniami elementarnymi są wszystkie funkcje różnowartościowe $f\colon \{1, 2, \ldots, k\} \to A$ lub równoważnie wszystkie ciągi różnowartościowe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takie, że $x_i \in A$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ lub równoważnie wszystkie permutacje zbioru A; jest to model klasyczny i $|\Omega| = n!$.
5. W doświadczeniu polegającym na jednoczesnym losowaniu k elementów ze zbioru A lub k-krotnym losowaniu po jednym elemencie bez zwracania ze zbioru A takiego, że $|A| = n$ i $k \leqslant n$, ale nie interesuje nas kolejność losowania a tylko to czy dany element został wylosowany czy nie, zdarzeniami elementarnymi są wszystkie k-elementowe podzbiory zbioru A; jest to model klasyczny i $|\Omega| = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

6.1. Zakres podstawowy

Zadania z teorii prawdopodobieństwa, w zakresie podstawowym, dotyczą prostych doświadczeń losowych typu:

a) losowanie jednego elementu z podanego zbioru,
b) losowanie po jednym elemencie z dwóch (trzech) zbiorów,
c) kilkukrotne losowanie po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru, np. rzuty kostką to losowanie po jednym elemencie ze zwracaniem ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
d) kilkukrotne losowanie po jednym elemencie bez zwracania z danego zbioru.

Przykład 1.

Dane są liczby 2 oraz 4. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ wybieramy losowo jedną liczbę i oznaczamy ją k. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia: istnieje trójkąt o długościach boków 2, 4, k.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie elementy zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, spełnione są założenia twierdzenia „klasyczna definicja prawdopodobieństwa”, $|\Omega| = 8$.

Określamy zdarzenia A:

A — liczby 2, 4, k są długościami boków trójkąta, czyli spełniają nierówności trójkąta tzn. suma długości każdych dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.

$$\begin{cases} 2+4 > k \\ 2+k > 4 \\ 4+k > 2 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} k < 6 \\ k > 2 \\ k > -2 \end{cases}, \text{ czyli } k \in \{3, 4, 5\}, \text{ stąd } |A| = 3 \text{ i } P(A) = \frac{3}{8}.$$

Przykład 2.

Są dwa pojemniki. W każdym z nich są cztery kule. W pierwszym pojemniku jest 1 kula biała i 3 kule czarne, w drugim są 2 kule białe i dwie kule czarne. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A — otrzymamy dwie kule białe,

B — otrzymamy dokładnie jedną kulę białą.

I sposób rozwiązania

Pamiętamy o postulacie rozróżnialności i numerujemy kule w każdym pojemniku. W pojemniku pierwszym kula biała ma numer 1, kule czarne — numery 2, 3, 4; w pojemniku drugim kule białe mają numery 1, 2, kule czarne mają numery 3, 4. Zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są wszystkie ciągi dwuelementowe (a, b) o wartościach w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny.

Korzystając z reguły mnożenia mamy:

$$|\Omega| = 4 \cdot 4 = 16.$$

Zdarzeniu A sprzyjają wszystkie ciągi odpowiadające wyborowi kuli białej z każdego pojemnika,

$$|A| = 1 \cdot 2 = 2 \text{ i } P(A) = \frac{2}{16} = 0,125.$$

Zdarzenie B jest sumą dwóch zdarzeń rozłącznych $B = B_1 \cup B_2$, gdzie

B_1 — z pierwszego pojemnika wylosujemy kulę białą i z drugiego czarną,

B_2 — z pierwszego pojemnika wylosujemy kulę czarną i z drugiego białą.

$$|B_1| = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$|B_2| = 3 \cdot 2 = 6.$$

Zdarzenia B_1, B_2 są rozłączne, stąd

$$|B| = |B_1| + |B_2| \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{8}{16} = 0,5.$$

II sposób rozwiązania (metoda tabeli)

Ponumerujmy kule w każdym pojemniku. Niech w pojemniku pierwszym kula biała ma numer 1, kule czarne numery 2, 3, 4; w pojemniku drugim kule białe mają numery 1, 2, kule czarne mają numery 3, 4. Zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są wszystkie ciągi dwuelementowe (a, b) o wartościach w zbiorze $\{1, 2, 3, 4\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, jest to model klasyczny.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω możemy przedstawić w postaci tabeli 4×4.

Rysujemy dwie tabele. W pierwszej zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, w drugiej zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu B i obliczamy odpowiednie prawdopodobieństwo.

Uwaga

Możemy narysować tabelę 2×2, ale w tak opisanym zbiorze Ω zdarzenia jednoelementowe nie są równoprawdopodobne, **nie byłby to model klasyczny.**

III sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo, które ma dwa poziomy. Drzewo może mieć 16 gałęzi, albo w prostszej wersji 4 gałęzie. Zapisujemy prawdopodobieństwa przy odcinkach drzewa i obliczamy prawdopodobieństwo.

Przykład 3.

W pewnym liceum ogólnokształcącym są dwie klasy trzecie, których skład osobowy przedstawiono w tabeli.

klasa	liczba wszystkich uczniów	liczba dziewcząt
IIIa	30	18
IIIb	32	16

Z każdej klasy wybieramy losowo jednego ucznia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że zostanie wybrana dziewczynka i chłopiec. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

I sposób rozwiązania

Na podstawie tabeli odczytujemy skład obu klas:

- IIIa: 18 dziewczynek i 12 chłopców,
- IIIb: 16 dziewczynek i 16 chłopców.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a, b), gdzie a oznacza ucznia klasy IIIa, zaś b oznacza ucznia klasy IIIb. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy schemat klasyczny.

$$|\Omega| = 30 \cdot 32 = 960.$$

Zdarzenie A jest sumą dwóch zdarzeń:

- A_1 — z klasy IIIa zostanie wybrana dziewczynka i z klasy IIIb zostanie wybrany chłopiec,
- A_2 — z klasy IIIa zostanie wybrany chłopiec i z klasy IIIb zostanie wybrana dziewczynka.

$$A = A_1 \cup A_2.$$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, stąd $|A| = |A_1| + |A_2|$,

$$|A_1| = 18 \cdot 16 = 288$$
$$|A_2| = 12 \cdot 16 = 192$$

$|A| = 288 + 192 = 480$ i $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{480}{960} = \frac{1}{2}$.

II sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo, które ma dwa poziomy. Drzewo dla zdarzenia A, na którym są tylko istotne gałęzie, ma 4 gałęzie (wyróżniamy płeć).

Zapisujemy prawdopodobieństwa przy odcinkach drzewa i obliczamy prawdopodobieństwo dodając odpowiednie iloczyny.

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Przykład 4.

Ze zbioru liczb $\{0,1,2,3,4,5\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania i oznaczając pierwszą wylosowaną liczbę przez a, drugą przez b, tworzymy liczbę $x=10a+b$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A — x będzie dwucyfrową liczbą parzystą,

B — x będzie dwucyfrową liczbą podzielną przez trzy.

I sposób rozwiązania

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe ciągi różnowartościowe (a,b) o wartościach w zbiorze $\{0,1,2,3,4,5\}$ — dwuelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru sześcioelementowego.

Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, jest to model klasyczny i $|\Omega|=6\cdot5=30$.

Obliczamy $P(A)$.

Zauważmy, że $A=A_1\cup A_2$, gdzie

- A_1 — pierwsza liczba będzie parzysta, różna od zera i druga liczba będzie parzysta (różna od pierwszej),
- A_2 — pierwsza liczba będzie nieparzysta i druga liczba będzie parzysta.

$$|A_1|=2\cdot2=4,$$

$$|A_2|=3\cdot3=9,$$

$A_1\cap A_2=\emptyset$, stąd $|A|=|A_1|+|A_2|=13$ i $P(A)=\frac{13}{30}$.

Obliczamy $P(B)$.

Liczba jest podzielna przez trzy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez trzy, stąd

$$B=\{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,0),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4)\}, |B|=9 \text{ i } P(B)=0{,}3.$$

II sposób rozwiązania (metoda tabeli)

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω możemy przedstawić w postaci tabeli 6×6 z usuniętą przekątną zawierającą $(0,0)$. W tabeli jest $6\cdot6-6=30$ pól.

Rysujemy dwie tabele. W pierwszej zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, w drugiej zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu B i obliczamy odpowiednie prawdopodobieństwa.

III sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Rysujemy dwa drzewa, pierwsze dla zdarzenia A, drugie dla zdarzenia B. Drzewo ma 2 poziomy. Zapisujemy prawdopodobieństwa przy odcinkach drzewa i obliczamy prawdopodobieństwo dodając odpowiednie iloczyny.

Drzewo dla zdarzenia A, na którym są tylko istotne gałęzie, ma 4 gałęzie.

$$P(A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{30}.$$

Drzewo dla zdarzenia B, na którym są tylko istotne gałęzie, ma 10 gałęzi.

$$P(B)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{9}{30}=0,3.$$

Przykład 5. — stosowanie własności prawdopodobieństwa

Zdarzenia losowe A,B są zawarte w Ω i $P(B')=0,65$; $P(A\cup B)=0,5$; $P(A\cap B)=0,2$. Oblicz:

a) $P(A)$,

b) $P(B\setminus A)$.

Rozwiązanie

$P(B)=1-P(B')$, stąd $P(B)=0,35$.

Korzystając ze wzoru $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ obliczamy $P(A)$.

$$P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cap B)=0,5-0,35+0,2=0,35.$$

Korzystając z wzoru $P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$ obliczamy $P(B\setminus A)$.

$$P(B\setminus A)=0,35-0,2=0,15.$$

6.2. Zakres rozszerzony

Przykład 1.

Zdarzenia losowe A,B są zawarte w Ω. Liczby $P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ są w podanej kolejności pierwszym, trzecim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego oraz $P(A\cup B)=0,65$ i $P(B\setminus A)=0,3$. Oblicz $P(A'\cup B)$.

Rozwiązanie

Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r.

$$P(A\cap B)=a_1,\quad P(A)=a_1+2r,\quad P(B)=a_1+3r.$$

Korzystając z własności prawdopodobieństwa zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)\end{cases}$$

Podstawiając dane otrzymujemy:

$$\begin{cases} 0,65 = a_1 + 2r + a_1 + 3r - a_1 \\ 0,3 = a_1 + 3r - a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,65 = a_1 + 5r \\ 0,3 = 3r \end{cases}$$

stąd $a_1 = 0,15$, $r = 0,1$ i $P(A \cap B) = 0,15$, $P(A) = 0,15 + 0,2 = 0,35$, $P(B) = 0,15 + 0,3 = 0,45$.

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 0,8.$$

Przykład 2.

Pięć ponumerowanych kul rozmieszczamy losowo w trzech ponumerowanych komórkach.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A — pierwsza komórka będzie pusta,

B — pierwsza komórka będzie pusta lub druga komórka będzie pusta.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnym są wszystkie pięcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru trzyelementowego (każdej kuli przyporządkujemy numer komórki, w której będzie umieszczona).

Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, jest to model klasyczny,

$$|\Omega| = 3^5 = 243.$$

Zdarzeniu A — pierwsza komórka będzie pusta — sprzyjają zdarzenia elementarne odpowiadające rozmieszczeniu wszystkich kul w drugiej i trzeciej komórce — pięcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru dwuelementowego.

$$|A| = 2^5 \text{ i } P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}.$$

Zdarzenie B jest sumą dwóch zdarzeń, $B = B_1 \cup B_2$, gdzie zdarzenie B_i oznacza zdarzenie polegające na tym, że komórka o numerze i będzie pusta, $i \in \{1, 2\}$.

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2).$$

$$|B_1| = |B_2| = 2^5, \qquad |B_1 \cap B_2| = 1,$$

(jest tylko jedno rozmieszczenie, w którym pierwsza i druga komórka będą puste — wszystkie kule będą w trzeciej komórce).

$$P(B) = \frac{2 \cdot 2^5 - 1^5}{3^5} = \frac{7}{27}.$$

Przykład 3.

Osiem ponumerowanych kul rozmieszczamy losowo w trzech ponumerowanych pojemnikach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A — w pierwszym pojemniku będą cztery kule,

B — w pierwszym pojemniku będą cztery kule i w drugim pojemniku będą trzy kule.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie ośmioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru trójelementowego — każdej kuli przyporządkujemy numer komórki, w której będzie umieszczona. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, jest to model klasyczny i

$$|\Omega| = 3^8 = 6561.$$

Zdarzeniu A sprzyjają te rozmieszczenia, w których cztery kule są w pierwszym pojemniku, a pozostałe cztery kule są rozmieszczone dowolnie w pozostałych dwóch pojemnikach.

Obliczamy $|A|$: numery kul, które będą w pierwszym pojemniku wybieramy na $\binom{8}{4}$ sposobów, pozostałe kule, w dwóch pozostałych pojemnikach rozmieszczamy na 2^4 sposobów, korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy

$$|A| = \binom{8}{4} \cdot 2^4 = 1120 \text{ i } P(A) = 0,170705\ldots.$$

Zdarzeniu B sprzyjają te rozmieszczenia, w których cztery kule są w pierwszym pojemniku, trzy w drugim pojemniku i jedna w trzecim pojemniku.

Obliczamy $|B|$:

numery kul, które będą w pierwszym pojemniku wybieramy na $\binom{8}{4}$ sposobów,

numery kul, które będą w drugim pojemniku wybieramy na $\binom{4}{3}$ sposobów,

korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy

$$|B| = \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3} = 280 \quad \text{oraz} \quad P(B) = 0,042676\ldots$$

Przykład 4.

Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie trzy razy ściankę z trzema oczkami i suma liczb oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie parzysta.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pięcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 6^5$.

Zdarzenie A polega na tym, że dokładnie w trzech rzutach otrzymamy trzy oczka, w jednym z pozostałych dwóch rzutów otrzymamy jedno albo pięć oczek, a w drugim parzystą liczbę oczek.

Obliczamy $|A|$:

numery trzech rzutów dla trzech oczek wybieramy na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów,

numer rzutu, z dwóch pozostałych, dla liczby oczek ze zbioru $\{1,5\}$ wybieramy na 2 sposoby,

liczbę oczek na 2 sposoby

parzystą liczbę oczek na 3 sposoby;

korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy $|A| = \binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 120$.

Stąd $P(A) = \frac{120}{6^5} = \frac{5}{324}$.

Przykład 5.

Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie trzy razy ściankę z trzema oczkami i iloczyn liczb oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie parzysty.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pięcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 6^5$.

Zdarzenie A polega na tym, że w dokładnie trzech rzutach otrzymamy trzy oczka i w pozostałych dwóch rzutach otrzymamy co najmniej raz parzystą liczbę oczek.

Obliczamy $|A|$:

numery trzech rzutów dla trzech oczek wybieramy na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów, co najmniej raz parzystą liczbę oczek, w pozostałych dwóch rzutach, możemy otrzymać na $5^2 - 2^2 = 21$ sposobów — możliwe są wyniki ze zbioru $\{1,2,4,5,6\}$ (albo $3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 21$ sposobów), korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy $|A| = \binom{5}{3} \cdot 21 = 210$.

Stąd $P(A) = \frac{210}{6^5} = \frac{35}{1296}$.

Przykład 6.

Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie trzy razy ściankę z trzema oczkami i iloczyn liczb oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie podzielny przez 45.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pięcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 6^5$.

Zdarzenie A polega na tym, że w dokładnie trzech rzutach otrzymamy trzy oczka i w pozostałych dwóch rzutach otrzymamy co najmniej raz pięć oczek.

Obliczamy $|A|$:

numery trzech rzutów dla trzech oczek wybieramy na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów, co najmniej raz pięć oczek w pozostałych dwóch rzutach możemy otrzymać na $5^2 - 4^2 = 9$ sposobów — możliwe są wyniki ze zbioru $\{1,2,4,5,6\}$ (albo $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 9$ sposobów), korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy $|A| = \binom{5}{3} \cdot 9 = 90$.

Stąd $P(A) = \frac{90}{6^5} = \frac{5}{432}$.

Przykład 7.

Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie trzy razy ściankę z trzema oczkami i suma liczb oczek uzyskanych we wszystkich rzutach będzie podzielna przez 3.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pięcioelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 6^5$.

Zdarzenie A polega na tym, że dokładnie w trzech rzutach otrzymamy trzy oczka i w pozostałych dwóch rzutach otrzymamy liczby oczek, których suma jest podzielna przez 3, tzn. otrzymamy dwa razy 6 oczek albo w jednym z rzutów będzie liczba oczek ze zbioru $\{1,4\}$, a w drugim ze zbioru $\{2,5\}$.

Obliczamy $|A|$:

numery trzech rzutów dla trzech oczek wybieramy na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów, otrzymamy dwa razy 6 oczek na 1 sposób albo wybieramy numer rzutu, w którym będzie liczba oczek ze zbioru $\{1,4\}$ na 2 sposoby, liczbę ze zbioru $\{1,4\}$ na 2 sposoby i liczbę ze zbioru $\{2,5\}$ na 2 sposoby; razem $1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 9$ sposobów, korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy $|A| = \binom{5}{3} \cdot 9 = 90$.

Stąd $P(A) = \frac{90}{6^5} = \frac{5}{432}$.

Przykład 8.

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Oznaczając kolejno wylosowane liczby przez a, b, c tworzymy liczbę $x = 100a + 10b + c$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A — liczba x będzie nieparzysta.

I sposób rozwiązania (pełna informacja o wyniku doświadczenia)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 9\cdot 8\cdot 7 = 504$.

Zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia elementarne, w których c jest liczbą nieparzystą.

W typowym rozwiązaniu zdarzenie A jest sumą czterech parami rozłącznych zdarzeń

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

gdzie

A_1 — a, b, c są nieparzyste, $|A_1| = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

A_2 — a, c są nieparzyste, b jest parzysta, $|A_2| = 5\cdot 4\cdot 4 = 80$

A_1 — b, c nieparzyste, a parzysta, $|A_3| = 4\cdot 5\cdot 4 = 80$

A_1 — a, b są parzyste, c jest nieparzysta, $|A_4| = 4\cdot 3\cdot 5 = 60$

$$|A| = 280 \quad \text{i} \quad P(A) = \frac{5}{9}$$

II sposób rozwiązania

Aby sprawdzić, czy liczba x jest trzycyfrowa i nieparzysta wystarczy znać liczbę c, liczby a oraz b są „nieistotne”. Na trzecim miejscu może wystąpić każda z dziewięciu liczb i są to sytuacje jednakowo możliwe. Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,\ldots,9\}$, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 9$, $|A| = 5$ oraz $P(A) = \frac{5}{9}$.

Uwaga 1.

Fakt, że na trzecim miejscu może wystąpić każda z liczb ze zbioru $\{1,2,\ldots,9\}$ nie budzi sprzeciwu, ale to, że wszystkie mają równe prawdopodobieństwo nie jest dla wielu osób oczywiste. Nie jest też oczywiste, że najpierw możemy wybrać liczbę c, potem pozostałe w dowolnej kolejności i otrzymamy ten sam model.

Uwaga 2.

Jak wynika z rozwiązania, w którym stosujemy **II sposób rozwiązania**, przy uogólnieniu tego zadania na przypadek, gdy losujemy k liczb bez zwracania i tworzymy liczbę $x = 10^{k-1}\cdot a_1 + 10^{k-2}\cdot a_2 + \ldots + a_k$ $(2 \leqslant k \leqslant 10)$, wynik tego zadania nie zależy od tego ile liczb losujemy.

Uwaga 3.

Zadanie, którego rozwiązanie przedstawiliśmy, ma wiele innych wariantów „historyjek”, idea jest ta sama, można je rozwiązać w pamięci budując odpowiednik **II sposobu rozwiązania**.

Przykład — typowe zadanie z wielu zbiorów zdań

Z pojemnika, w którym jest siedem kul białych i cztery kule czarne, losujemy trzy razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania kuli czarnej w trzecim losowaniu.

Większość „zalecanych” sposobów rozwiązania, to odpowiednik **I sposobu rozwiązania** z pełną informacją o wyniku doświadczenia.

Uwaga 4.

Pomocą w kształceniu intuicji w tym zagadnieniu może być leżąca na stole talia kart.

Powinno być jasne, że zdarzenia:

A — pierwsza karta jest pikiem,

B — trzecia karta jest pikiem

są równoprawdopodobne.

Przykład 9.

Ze zbioru liczb $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Oznaczając kolejno wylosowane liczby przez a,b,c tworzymy liczbę $x=100a+10b+c$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A — liczba x będzie trzycyfrowa i nieparzysta.

I sposób rozwiązania (pełna informacja o wyniku doświadczenia)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$.

Zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia elementarne, w których $a\neq 0$ oraz c jest liczbą nieparzystą.

W typowym rozwiązaniu zdarzenie A jest sumą czterech parami rozłącznych zdarzeń

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$

gdzie

A_1 — a,b,c są nieparzyste, $|A_1| = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

A_2 — a,c są nieparzyste, b jest parzysta, $|A_2| = 5\cdot 5\cdot 4 = 100$

A_3 — b,c są nieparzyste, a jest parzysta, $|A_3| = 4\cdot 5\cdot 4 = 80$

A_4 — a,b są parzyste, c jest nieparzysta, $|A_4| = 4\cdot 4\cdot 5 = 80$

$$|A| = 320 \quad \text{i} \quad P(A) = \frac{4}{9}$$

II sposób rozwiązania

Aby sprawdzić, czy liczba x jest trzycyfrowa i nieparzysta wystarczy znać liczby a oraz c, liczba b jest „nieistotna”.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 10\cdot 9$.

Zdarzeniu A sprzyjają zdarzenia elementarne, w których $a\neq 0$ oraz c jest liczbą nieparzystą.

$|A| = 5\cdot 8 = 40$, (najpierw wybieramy c, potem a), $P(A) = \frac{4}{9}$.

Uwaga

Jak wynika z rozwiązania, w którym stosujemy **II sposób rozwiązania**, przy uogólnieniu tego zadania na przypadek, gdy losujemy k, $(2 \leqslant k \leqslant 10)$, liczb bez zwracania i tworzymy liczbę $x = 10^{k-1} \cdot a_1 + 10^{k-2} \cdot a_2 + \ldots + a_k$. Wynik tego zadania nie zależy od tego, ile liczb losujemy. W przypadku losowania np. sześciu liczb rozwiązanie, w którym stosujemy **I sposób rozwiązania** (pełna informacja), jest bardzo uciążliwe rachunkowo.

Sygnalizujemy tu bardzo ważne zagadnienie. Ucząc rozwiązywania zadań dotyczących rachunku prawdopodobieństwa należy pokazywać uczniom, że czasami model zbudowany zgodnie ze „szczegółami technicznymi” przebiegu doświadczenia jest rachunkowo bardzo uciążliwy, a model uwzględniający tylko problem związany z tym doświadczeniem pozwala rozwiązać zadanie w pamięci.

Przykład 10.

Zbiór liczb $\{1,2,\ldots,7\}$ porządkujemy w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie liczbą nieparzystą. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru siedmioelementowego, zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne, jest to model klasyczny i $|\Omega| = 7!$.

Zdarzeniu A sprzyjają te permutacje zbioru $\{1,2,\ldots,7\}$, w których na miejscach o numerach nieparzystych będą liczby nieparzyste, a na miejscach o numerach parzystych liczby parzyste.

Stąd

$$|A| = 4! \cdot 3! \text{ i } P(A) = \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{1}{35}.$$

Przykład 11.

Liczby $1,2,3,4,5,6,7$ ustawiamy w szeregu w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba 1 nie będzie stała obok liczby 2 oraz iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb będzie parzysty.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 7! = 5040$.

Zdarzenie A polega na tym, że liczby nieparzyste stoją na miejscach o numerach nieparzystych, liczby parzyste stoją na miejscach o numerach parzystych i liczby 1 oraz 2 nie stoją obok siebie. Wyróżniamy dwa przypadki, liczba 1 stoi na miejscu pierwszym lub ostatnim albo liczba 1 stoi „w środku”.

Obliczamy $|A|$: gdy liczba 1 stoi na miejscu pierwszym lub ostatnim, to liczbę 2 możemy ustawić na 2 sposoby, a gdy liczba 1 stoi „w środku” to liczbę 2 możemy ustawić na 1 sposób, pozostałe liczby nieparzyste ustawiamy na $3! = 6$ sposobów i pozostałe liczby parzyste ustawiamy na $2! = 2$ sposoby; korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy $|A| = (2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) \cdot 6 \cdot 2 = 72$.

Stąd $P(A)=\frac{72}{5040}=\frac{1}{70}$.

Przykład 12.

Liczby $1,2,3,4,5,6,7,8$ ustawiamy w szeregu w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba 1 nie będzie stała obok liczby 2 oraz suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega|=8!=40320$.

Zdarzenie A polega na tym, że liczby nieparzyste stoją na miejscach o numerach nieparzystych, liczby parzyste stoją na miejscach o numerach parzystych albo odwrotnie i liczby 1 oraz 2 nie stoją obok siebie. Wyróżniamy dwa przypadki, liczba 1 stoi na miejscu pierwszym lub ostatnim albo liczba 1 stoi „w środku".

Obliczamy $|A|$:

gdy liczba 1 stoi na miejscu pierwszym lub ostatnim, to liczbę 2 możemy ustawić na 3 sposoby, a gdy liczba 1 stoi „w środku", to liczbę 2 możemy ustawić na 2 sposoby, pozostałe liczby nieparzyste ustawiamy na $3!=6$ sposobów i pozostałe liczby parzyste ustawiamy na $3!=6$ sposobów;

korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy $|A|=(2\cdot 3+6\cdot 2)\cdot 6\cdot 6=648$.

Stąd $P(A)=\frac{648}{40320}=\frac{9}{560}$.

Przykład 13.

Liczby $1,2,3,4,5,6,7,8$ ustawiamy w szeregu w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba 1 będzie stała obok liczby 2 oraz liczba 3 będzie stała obok liczby 4.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega|=8!=40320$.

I sposób obliczenia $|A|$

Zdarzenie A polega na tym, że liczby 1 i 2 stoją obok siebie oraz liczby 3 i 4 stoją obok siebie. Jest 7 par kolejnych miejsc. Wyróżniamy dwa przypadki:

1. gdy liczby 1 i 2 stoją na miejscach 1,2 albo 7,8, to dla pary 3 i 4 mamy 5 par kolejnych miejsc,
2. w pozostałych przypadkach (gdy liczby 1 i 2 stoją na miejscach 2,3 albo 3,4 albo 4,5 albo 5,6 albo 6,7) dla pary 3 i 4 mamy 4 pary kolejnych miejsc.

Obliczamy $|A|$:

gdy liczby 1 i 2 stoją na miejscach 1, 2 albo 7, 8 — 2 możliwości, to dla pary 3 i 4 mamy 5 par kolejnych miejsc, w pozostałych 5 przypadkach dla pary 3 i 4 mamy 4 pary kolejnych miejsc;

na wybranych miejscach liczby 1, 2 oraz 3, 4 ustawiamy na $2 \cdot 2 = 4$ sposoby, pozostałe 4 liczby na pozostałych 4 miejscach ustawiamy na $4! = 24$ sposoby;

korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy $|A| = (2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2880$.

II sposób obliczenia $|A|$

Potraktujmy parę (1,2) jako jeden element oraz parę (3,4) jako jeden element. Zatem wraz z pozostałymi 4 liczbami ustawiamy w szeregu 6 elementów na 6! sposobów, w każdym z tych ustawień parę (1,2) można ustawić na 2 dwa sposoby i parę (3,4) na dwa sposoby.

Korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 6! = 2880$.

Stąd $P(A) = \frac{2880}{40320} = \frac{1}{14}$.

Przykład 14.

Liczby $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ustawiamy w szeregu w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba 1 będzie stała obok liczby 2 lub liczba 3 będzie stała obok liczby 4.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 8! = 40320$.

Zdarzenie A jest sumą dwóch zdarzeń $A = A_1 \cup A_2$.

Zdarzenie A_1 polega na tym, że liczby 1 i 2 stoją obok siebie,

zdarzenie A_2 polega na tym, że liczby 3 i 4 stoją obok siebie.

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Jest 7 par kolejnych miejsc.

Zdarzenie A_1 polega na tym, że liczby 1 i 2 zajmują kolejne miejsca.

Obliczamy $|A_1|$.

Kolejne miejsca wybieramy na 7 sposobów, liczby 1, 2 ustawiamy na tych miejscach na 2 sposoby, pozostałe 6 liczb na pozostałych 6 miejscach ustawiamy na $6! = 720$ sposobów; korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy $|A_1| = 7 \cdot 2 \cdot 6! = 10080$.

Analogicznie obliczamy $|A_2| = |A_1| = 10080$.

Zdarzenie $A_1 \cap A_2$ polega na tym, że liczby 1,2 będą obok siebie oraz liczby 3,4 będą obok siebie.

I sposób obliczenia $|A_1 \cap A_2|$

Zdarzenie $|A_1 \cap A_2|$ polega na tym, że liczby 1 i 2 stoją obok siebie oraz liczby 3 i 4 stoją obok siebie. Jest 7 par kolejnych miejsc. Wyróżniamy dwa przypadki:

a) gdy liczby 1 i 2 stoją na miejscach 1, 2 albo 7, 8, to dla pary 3 i 4 mamy 5 par kolejnych miejsc,
b) w pozostałych przypadkach (gdy liczby 1 i 2 stoją na miejscach 2, 3 albo 3, 4 albo 4, 5 albo 5, 6 albo 6, 7) dla pary 3 i 4 mamy 4 pary kolejnych miejsc.

Obliczamy $|A_1 \cap A_2|$:

gdy liczby 1 i 2 stoją na miejscach 1,2 albo 7,8 — 2 możliwości, to dla pary 3 i 4 mamy 5 par kolejnych miejsc, w pozostałych 5 przypadkach dla pary 3 i 4 mamy 4 pary kolejnych miejsc;

na wybranych miejscach liczby 1,2 oraz 3,4 ustawiamy na $2 \cdot 2 = 4$ sposoby, pozostałe 4 liczby na pozostałych 4 miejscach ustawiamy na $4! = 24$ sposoby;

korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy: $|A_1 \cap A_2| = (2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2880$.

II sposób obliczenia $|A_1 \cap A_2|$

Potraktujmy parę (1,2) jako jeden element oraz parę (3,4) jako jeden element. Zatem wraz z pozostałymi 4 liczbami ustawiamy w szeregu 6 elementów na 6! sposobów, w każdym z tych ustawień parę (1,2) można ustawić na 2 dwa sposoby i parę (3,4) na dwa sposoby.

Korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 6! = 2880$.

Stąd $|A| = 2 \cdot 10080 - 2880 = 17280$ i $P(A) = \frac{17280}{40320} = \frac{3}{7}$.

Przykład 15. (Arkusz I. Matura 17.01.2006. Zadanie 3.)

Po wiadomościach z kraju i ze świata telewizja TVG ma nadać pięć reklam: trzy reklamy różnych proszków do prania oraz dwie reklamy różnych past do zębów. Kolejność nadawania reklam jest ustalana losowo. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie reklamy produktów tego samego rodzaju nie będą nadane bezpośrednio jedna po drugiej. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Rozwiązania

Dla ustalenia uwagi przyporządkujemy proszkom do prania liczby 1, 2, 3, a pastom do zębów liczby 4, 5. Przez A oznaczmy zdarzenie opisane w treści zadania.

I sposób rozwiązania (pełna informacja o wyniku doświadczenia)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1,2,3,4,5\}$, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 5! = 120$

Zdarzeniu A sprzyjają permutacje, w których proszki stoją na miejscach o numerach 1, 3, 5, a pasty na miejscach 2, 4.

$$|A| = 3! \cdot 2! = 12, \ P(A) = \frac{1}{10}.$$

II sposób rozwiązania

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na pytanie, czy dwie reklamy produktów tego samego rodzaju nie będą nadane bezpośrednio jedna po drugiej, wystarczy wiedzieć, które miejsce zajmuje pierwsza pasta i które miejsce zajmuje druga pasta (albo, które miejsca zajmują kolejne proszki).

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$ (albo wszystkie trójelementowe trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$)

$$|A| = 2 \cdot 1 = 2, \ P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

(albo $|A| = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $P(A) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$).

III sposób rozwiązania

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na pytanie, czy dwie reklamy produktów tego samego rodzaju nie będą nadane bezpośrednio jedna po drugiej, wystarczy wiedzieć, które miejsca zajmują pasty - bez precyzowania ustawienia (albo, które miejsca zajmują proszki).

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru pięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{5}{2} = 10$ (albo wszystkie trzyelementowe podzbiory zbioru pięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{5}{3} = 10$).

Zdarzeniu A sprzyja jeden podzbiór

$$|A| = 1, \ P(A) = \frac{1}{10}.$$

Przykład 16.

10 osób, wśród których są panowie X oraz Y ustawia się w sposób losowy w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że pomiędzy panami X i Y będą stały dokładnie dwie osoby.

I sposób rozwiązania (pełna informacja o wyniku doświadczenia)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru dziesięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 10!$

$$|A| = 2 \cdot 7 \cdot 8!, \quad P(A) = \frac{7}{45}.$$

II sposób rozwiązania

Aby sprawdzić, czy pomiędzy panami X i Y stoją dokładnie dwie osoby, wystarczy wiedzieć, na którym miejscu stoi pan X, a na którym pan Y.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru dziesięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$

$$|A| = 2 \cdot 7 = 14, \quad P(A) = \frac{7}{45}.$$

III sposób rozwiązania

Aby sprawdzić, czy pomiędzy panami X i Y stoją dokładnie dwie osoby, wystarczy wiedzieć, które miejsca zajmują panowie X i Y, bez precyzowania ustawienia.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie podzbiory dwuelementowe zbioru dziesięcioelementowego, jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{10}{2} = 45$,

$$|A| = 7, \quad P(A) = \frac{7}{45}.$$

Przykład 17.

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ wybieramy losowo jednocześnie cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że najmniejszą wylosowaną liczbą będzie 3 lub największą wylosowaną liczbą będzie 7.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie podzbiory czteroelementowe zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{8}{4} = 70$.

Zdarzenie A jest sumą dwóch zdarzeń $A = A_1 \cup A_2$.

Zdarzenie A_1 polega na tym, że najmniejszą liczbą jest 3,

zdarzenie A_2 polega na tym, że największą liczbą jest 7.

$$|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Zdarzenie A_1 polega na tym, że wśród wylosowanych liczb jest 3 oraz trzy liczby ze zbioru $\{4,5,6,7,8\}$. Stąd $|A_1| = \binom{5}{3} = 10$.

Zdarzenie A_2 polega na tym, że wśród wylosowanych liczb jest 7 oraz trzy liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6\}$. Stąd $|A_2| = \binom{6}{3} = 20$.

Zdarzenie $A_1 \cap A_2$ polega na tym, że wśród wylosowanych liczb są 3 i 7 oraz dwie liczby ze zbioru $\{4,5,6\}$. Stąd $|A_1 \cap A_2| = \binom{3}{2} = 3$.

Otrzymujemy: $|A| = 10 + 20 - 3 = 27$ i $P(A) = \frac{27}{70}$.

Przykład 18.

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ wybieramy losowo jednocześnie cztery liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wśród wylosowanych liczb będą dokładnie dwie liczby parzyste oraz dokładnie jedna liczba podzielna przez 5.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie podzbiory czteroelementowe zbioru $\{1,2,3,\dots,10\}$. Jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{10}{4} = 210$.

Zdarzenie A polega na tym, że wśród wylosowanych liczb będą dokładnie dwie liczby parzyste oraz dokładnie jedna liczba podzielna przez 5. Wyróżniamy dwa przypadki:

wśród wylosowanych liczb jest liczba 10 i nie ma liczby 5,

wśród wylosowanych liczb jest liczba 5 i nie ma liczby 10.

Obliczamy $|A|$:

gdy wśród wylosowanych liczb jest liczba 10, to spośród pozostałych liczb parzystych należy wybrać jedną na 4 sposoby i spośród nieparzystych różnych od 5 należy wybrać dwie na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów;

gdy wśród wylosowanych liczb nie ma liczby 10, to musi być liczba 5, spośród pozostałych liczb parzystych należy wybrać dwie na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów i spośród nieparzystych różnych od 5 należy wybrać jedną na 4 sposoby.

Stąd $|A| = 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 48$ i $P(A) = \frac{48}{210} = \frac{8}{35}$.

Przykład 19.

Dwunastu zawodników, wśród których są X, Y oraz Z, podzielono losowo na dwie równoliczne grupy eliminacyjne, czerwoną i zieloną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że zawodnicy X i Y będą w tej samej grupie eliminacyjnej, a zawodnik Z w innej.

I sposób rozwiązania (podział na grupy)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie sześcioelementowe kombinacje zbioru dwunastoelementowego np. skład grupy czerwonej.

Jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{12}{6} = 924$.

Oznaczmy przez A_1 zdarzenie polegające na tym, że zawodnicy X i Y będą w grupie czerwonej, a zawodnik Z w zielonej oraz przez A_2 zdarzenie polegające na tym, że zawodnicy X i Y będą w grupie zielonej, a zawodnik Z w czerwonej.

Obliczamy $|A_1|$.

Do zawodników X i Y należy dobrać 4 zawodników spośród 9 pozostałych.

Możemy to zrobić na $\binom{9}{4}$ sposobów, stąd $|A_1| = \binom{9}{4} = 126$.

Analogicznie obliczamy $|A_2| = \binom{9}{4} = 126$.

Zatem $|A| = 2\cdot\binom{9}{4} = 252$, więc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2\cdot\binom{9}{4}}{\binom{12}{6}} = \frac{3}{11}$.

II sposób rozwiązania (grupa z X)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pięcioelementowe kombinacje zbioru jedenastoelementowego, skład grupy, w której będzie zawodnik X.

Jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{11}{5} = 462$.

Obliczamy $|A|$.

Do zawodników X i Y należy dobrać 4 zawodników spośród 9 pozostałych.

Możemy to zrobić na $\binom{9}{4}$ sposobów.

Zatem $|A| = \binom{9}{4} = 126$, więc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{11}{5}} = \frac{3}{11}$.

III sposób rozwiązania (uporządkowanie zawodników)

Ustawiamy losowo wszystkich zawodników w szeregu. Zawodnicy zajmujący miejsca od 1 do 6 to grupa czerwona, a zajmujący miejsca od 7 do 12 to grupa zielona.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trójki (x,y,z) parami różnych liczb ze zbioru $\{1,2,\ldots,12\}$, x to numer miejsca zawodnika X, y to numer miejsca zawodnika Y, z to numer miejsca zawodnika Z — informacje o pozostałych zawodnikach są nieistotne.

Jest to model klasyczny, $|\Omega| = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320$.

Dla każdej wartości x jest 5 sprzyjających wartości y oraz 6 sprzyjających wartości z.

Zatem $|A| = 12\cdot 5\cdot 6 = 360$, więc $P(A) = \frac{3}{11}$.

Przykład 20.

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,\ldots,20\}$ losujemy jednocześnie 8 liczb. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będą dokładnie dwie pary liczb, których suma jest równa 21.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie ośmioelementowe kombinacje zbioru $\{1,2,3,\ldots,20\}$.

Jest to model klasyczny, $|\Omega| = \binom{20}{8} = 125970$.

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych liczb będą dokładnie dwie pary liczb, których suma jest równa 21.

Obliczamy $|A|$.

Jest 10 par liczb, których suma jest równa 21. Aby zaszło zdarzenie A, muszą wystąpić dwie pary, wybieramy je na $\binom{10}{2}$ sposobów oraz z czterech spośród ośmiu pozostałych par, które wybieramy na $\binom{8}{4}$ sposobów, ma występować po jednej liczbie na 2^4 sposobów. Stąd

$$|A| = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot 2^4 = 50400 \quad \text{i} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1680}{4199}.$$

Rozdział 7

Prawdopodobieństwo warunkowe Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Edward Stachowski
konsultacja: Anna Olechnowicz

W podstawie programowej obowiązującej na egzaminie maturalnym od 2015 r. pojawiły się nowe treści programowe. Wśród nich są między innymi zagadnienia dotyczące prawdopodobieństwa warunkowego oraz twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Zatem w tych materiałach edukacyjnych większość uwagi została skupiona na pojęciu prawdopodobieństwa warunkowego, w szczególności na intuicji związanej z tym pojęciem (paradoksy). Jak pokazują dane historyczne, z poprzednich matur, zadania związane z zastosowaniem twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym nie sprawiają większych kłopotów. Uczniowie poprawnie rozwiązują takie zadania (na ogół za pomocą metody drzewa probabilistycznego).

Z prawdopodobieństwem warunkowym spotykamy się, gdy rozpatrujemy doświadczenie losowe i mamy dodatkową informację, że zaszło jakieś zdarzenie.

Przykład 1.

Doświadczenie losowe polega na rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry taką, że ścianki z jednym, dwoma i trzema oczkami są białe, a pozostałe ścianki są czarne.

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

A — otrzymamy parzystą liczbę oczek,

B — otrzymamy ściankę białą

i obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A, jeżeli wiadomo, że zaszło zdarzenie B.

(Możemy sobie wyobrazić, że ktoś rzucił kostką i nakrył ją dłonią, ale między palcami widać, że na wierzchu jest ścianka biała).

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, mamy model klasyczny, $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,3\}$.

Ponieważ wiemy, że zaszło zdarzenie B, więc możemy ograniczyć nasze rozważania wyłącznie do zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B. Zdarzeniu B sprzyjają trzy zdarzenia elementarne, spośród nich jedno sprzyja zdarzeniu A, tak więc prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B, jest równe $\frac{1}{3}$.

Prawdopodobieństwo to oznaczamy symbolem $P(A|B)$. Mamy więc $P(A|B) = \frac{1}{3}$ i zauważamy, że jest ono mniejsze od $P(A) = \frac{1}{2}$, bezwarunkowego prawdopodobieństwa zdarzenia A.

Jeżeli przez C oznaczymy zdarzenie — otrzymamy ściankę czarną, to rozumując analogicznie, otrzymamy $P(A|C)=\frac{2}{3}$ i $P(A|C)>P(A)$.

Analizując oba powyższe przypadki, zauważamy, że zarówno

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad P(A|C)=\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}.$$

Uwaga

Gdyby na kostce ścianki z jednym oczkiem i dwoma oczkami były białe, a pozostałe czarne, to rozumując jak poprzednio otrzymamy $P(A|B)=P(A|C)=\frac{1}{2}=P(A)$.

W tym przypadku informacja o kolorze ścianki, która wypadła, nic nie wnosi, gdy interesuje nas prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Otrzymaliśmy na podstawie naturalnego rozumowania w tym i innych przykładach wzór $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, i mamy nadzieję, że następująca definicja nie będzie dla nikogo zaskoczeniem.

Definicja

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, P — prawdopodobieństwem określonym na wszystkich zdarzeniach losowych zawartych w Ω oraz niech $B\subset\Omega$ będzie zdarzeniem losowym takim, że $P(B)>0$. Dla każdego zdarzenia losowego $A\subset\Omega$ prawdopodobieństwo warunkowe realizacji zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, jest to liczba określona wzorem

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Uwagi

1. Obliczając $P(A|B)$ obliczamy tylko $P(B)$ i $P(A\cap B)$. Nie obliczamy $P(A)$.
2. W przypadku modelu klasycznego $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

7.1. Podstawowe własności prawdopodobieństwa warunkowego

1. Jeżeli $P(A\cap B)=0$, to $P(A|B)=0$.
2. Jeżeli $A\subset B$, to $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}$.
3. Jeżeli $A\supset B$, to $P(A|B)=1$.
4. Możliwe są wszystkie trzy przypadki: $P(A|B)<P(A)$, $P(A|B)>P(A)$, $P(A|B)=P(A)$.

Zadanie 1.

Zdarzenia losowe A,B zawarte w Ω są takie, że $P(B')=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{4}$. Oblicz $P(A\cap B)$.

Szkic rozwiązania

$P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{4}$, stąd $P(A\cap B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$.

Zadanie 2.

Zdarzenia losowe A,B zawarte w Ω są takie, że $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A|B)=\frac{1}{3}$.

Oblicz $P(A\cup B)$.

Szkic rozwiązania

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B), \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3},$$

stąd

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ i $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$.

Zadanie 3.

Zdarzenia losowe A,B zawarte w Ω są takie, że $P(A|B)=\frac{1}{8}$. Oblicz $\frac{P(B\setminus A)}{P(B)}$.

Niech $B\setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń B oraz A.

Szkic rozwiązania

$$\frac{P(B\setminus A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)=\frac{7}{8}.$$

Zadanie 4.

Osiem osób, w tym X i Y, ustawiono losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że X i Y stoją obok siebie, jeżeli wiadomo, że Y stoi na miejscu piątym.

Odpowiedź: $\frac{2}{7}$.

Zadanie 5.

Na kółku mamy, losowo rozmieszczonych, sześć ponumerowanych kluczy, z których dokładnie jeden otwiera dany zamek. Oblicz prawdopodobieństwo, że czwarty klucz otwiera ten zamek, jeżeli wiadomo, że pierwszy i drugi klucz nie otworzył tego zamka.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$.

Zadanie 6.

Rozmieszczamy losowo trzy ponumerowane kule w czterech ponumerowanych komórkach. Przyjmując oznaczenia dla zdarzeń:

A — w pierwszej komórce będzie co najmniej jedna kula,

B — w drugiej komórce będzie co najmniej jedna kula,

oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

Szkic rozwiązania

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trójelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru czteroelementowego (wszystkie funkcje $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, numer kuli $\to$numer komórki). Jest to model klasyczny.

$$|\Omega| = 4^3 = 64.$$
$$P(A|B) = \frac{|A\cap B|}{|B|}.$$
$$|B| = 4^3 - 3^3 = 37.$$

Zdarzenie $A\cap B$ jest sumą trzech parami rozłącznych zdarzeń:

a) w pierwszej komórce są dwie kule i w drugiej jest jedna kula, takie rozmieszczenia są 3 (na 3 sposoby wybieramy jedną kulę do drugiej komórki),
b) w drugiej komórce są dwie kule i w pierwszej jest jedna kula, takie rozmieszczenia są 3,
c) pierwszej komórce jest jedna kula i w drugiej jest jedna kula, takich rozmieszczeń jest 12 (na 3 sposoby wybieramy kulę do komórki pierwszej i na dwa sposoby wybieramy kulę do komórki drugiej i na 2 sposoby wybieramy komórkę dla trzeciej kuli, $3\cdot 2\cdot 2 = 12$ albo na 2 sposoby wybieramy komórkę, która będzie „zajęta” i rozmieszczamy 3 kule w 3 komórkach po jednej na 3! sposobów, $2\cdot 3! = 12$).

Stąd $|A\cap B| = 3+3+12 = 18$ i $P(A|B) = \frac{18}{37}$.

7.2. Ciekawostki

Zakładamy, że wszystkie podane niżej prawdopodobieństwa warunkowe są określone, nie będziemy pisali założeń dla każdego przykładu oddzielnie.

Przykład 2.

$$P(A|B) > P(A) \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad P(B|A) > P(B), \tag{$*$}$$

ponieważ, przekształcając równoważnie, otrzymujemy

$$P(A|B) > P(A),$$
$$P(A\cap B) > P(A)P(B),$$
$$P(B|A) > P(B).$$

Nierówność $P(A|B) > P(A)$ interpretujemy w ten sposób, że zajście zdarzenia B zwiększa prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A. Nierówność $(*)$ jest sprzeczna z intuicją wielu osób, którym wydaje się, że jeśli zajście B zwiększa prawdopodobieństwo zajścia A, to zajście A zmniejsza prawdopodobieństwo zajścia B.

Przykład 3.

Jeżeli A, B, C są zdarzeniami takimi, że $C \subset A \cap B$ oraz $P(B \setminus A) > 0$ ($B \setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń), to $P(C|A) > P(C|A \cup B)$.

Nierówność ta wynika z równości $C \cap A = C \cap (A \cup B)$ i nierówności $P(A) < P(A \cup B)$ wynikającej z założenia $P(B \setminus A) > 0$.

Korzystając z tej nierówności widzimy, bez żadnych obliczeń, że w grze w brydża prawdopodobieństwo zdarzenia, że gracz X ma 4 asy, jeżeli wiemy, że ma asa pik, jest większe od prawdopodobieństwa, że gracz X ma 4 asy, jeżeli wiemy, że ma co najmniej jednego asa.

Ten fakt w końcu XIX wieku był przyczyną nieporozumienia między egzaminatorami na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Cambridge. Wiele osób, opierając się na intuicji, jest zdania, że prawdziwa jest nierówność „w drugą stronę".

7.3. Paradoksy

Paradoks trzech komód

Są trzy komody A, B, C. W każdej z nich są dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie A w obu szufladach są monety złote, w komodzie B w obu szufladach są monety srebrne, a w komodzie C w jednej z szuflad jest moneta złota a w drugiej moneta srebrna. Wylosowano komodę, następnie szufladę i znaleziono w niej monetę złotą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugiej szufladzie tej komody też jest moneta złota.

Typowa agitacja (błędna)

Na pewno nie wylosowano komody B. Są więc dwa przypadki, wylosowano komodę A albo komodę C. W przypadku komody A, w drugiej szufladzie jest moneta złota. W przypadku komody C, w drugiej szufladzie jest moneta srebrna. Stąd wynika, że prawdopodobieństwo tego, że w drugiej szufladzie tej komody też jest moneta złota, jest równe $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie tradycyjne

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

A — wylosowano komodę A,

Z — wylosowano złotą monetę.

Mamy obliczyć $P(A|Z)$.

$$P(A|Z) = \frac{P(Z|A)P(A)}{P(Z)}.$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(Z|A) = 1, P(Z) = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$P(A|Z) = \frac{P(Z|A)P(A)}{P(Z)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Rozwiązanie elementarne

Wylosowano monetę złotą. Są trzy monety złote. Wylosowanie każdej z nich jest jednakowo prawdopodobne. Dwie z nich wskazują na komodę A, jedna na komodę C. Stąd $P(A|Z) = \frac{2}{3}$.

Typowa agitacja, cd.

Błąd w rozumowaniu polega na tym, że opisane dwa przypadki nie są równoprawdopodobne.

Dylemat więźnia (Problem Serbelloni. W 1966 w Villi Serbelloni odbyła się konferencja poświęcona biologii teoretycznej, podobno ten problem omal nie doprowadził do zerwania obrad)

Trzej zbójcy X , Y , Z zostali skazani na śmierć. Władca, z okazji święta, postanowił ułaskawić jednego z nich, a dwóch stracić. Zbój X nie wie jeszcze, którzy z więźniów zostaną straceni i czy on sam jest jednym z tych dwóch. Zagaduje więc strażnika, który zna decyzję władcy: „na pewno stracony zostanie Y lub Z , więc jeżeli wyjawisz mi teraz, który z nich zostanie stracony, to niczego nie powiesz o moim losie”. Strażnik po krótkim namyśle przychylił się do prośby więźnia i powiedział, że umrze Y . Usłyszawszy to, X się nieco uspokoił, bowiem prawdopodobieństwo jego ocalenia zwiększyło się z 1/3 do 1/2.

(X wie teraz, że zostanie stracony Y, a drugim nieszczęśnikiem będzie albo on albo Z).

Czy zbój X ma rację?

Szczegółowe rozwiązanie

Zestawmy w tabeli wszystkie możliwe pary zbójów skazanych na śmierć i decyzję strażnika.

	skazani	ocalony	imię podane przez strażnika	prawdopodobieństwo podania tego imienia
A	X, Y	Z	Y	$\frac{1}{3}$
B	X, Z	Y	Z	$\frac{1}{3}$
C	Y, Z	X	Y albo Z	$\frac{1}{3}$

Zauważmy, że w trzecim przypadku strażnik może podać imię Y albo Z.

W tym rozwiązaniu (przypadek klasyczny) przyjmiemy, że w takiej sytuacji imię każdego ze skazanych podaje z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (losowo wskazuje skazańca).

Mamy zatem cztery możliwości:

	skazani	ocalony	imię podane przez strażnika	prawdopodobieństwo podania tego imienia
A	X, Y	Z	Y	$\frac{1}{3}$
B	X, Z	Y	Z	$\frac{1}{3}$
C_1	Y, Z	X	Y	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
C_2	Y, Z	Z	Z	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Rozważmy teraz przypadki, w których strażnik powiedział, że stracony będzie Y. Są to A oraz C_1. Prawdopodobieństwo tego, że strażnik poda imię Y jest równe $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ i stąd otrzymujemy, że prawdopodobieństwo tego, że X zostanie ułaskawiony, jeżeli strażnik powie imię Y jest równe $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$, czyli ta informacja nic nie wniosła.

Uwaga

Są dwa zdarzenia:

A_1 — stracony zostanie zbój Y,

A_2 — strażnik powiedział, że stracony zostanie zbój Y.

$A_1 \supset A_2$ i $A_1 \neq A_2$.

W przypadku klasycznym zdarzenia: A_2 i „ułaskawiony został X” są niezależne.

Wracając do problemu, odpowiedź będzie inna, gdyby wiadomo było, że strażnik w sytuacji, gdy mają być straceni Y oraz Z podaje imię Y z prawdopodobieństwem p, a imię Z z prawdopodobieństwem $1-p$, gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1$ (np. można wyobrazić sobie sytuację, gdy strażnik bardzo nie lubi więźnia Z, wtedy $p = 0$).

Mamy zatem cztery możliwości, które przedstawimy w tabeli.

	skazani	ocalony	imię podane przez strażnika	prawdopodobieństwo podania tego imienia
A	X, Y	Z	Y	$\frac{1}{3}$
B	X, Z	Y	Z	$\frac{1}{3}$
C_1	Y, Z	X	Y	$\frac{1}{3} \cdot p = \frac{p}{3}$
C_2	Y, Z	Z	Z	$\frac{1}{3} \cdot (1-p) = \frac{1-p}{3}$

Prawdopodobieństwo tego, że strażnik poda imię Y jest równe $\frac{1}{3} + \frac{p}{3} = \frac{1+p}{3}$ i stąd otrzymujemy, że prawdopodobieństwo tego, że X zostanie ułaskawiony, jeżeli strażnik powiedział imię Y, jest równe $\frac{\frac{p}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{p}{3}} = \frac{p}{1+p}$, $\left(0 \leqslant \frac{p}{1+p} \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Dla $p=0$ to prawdopodobieństwo jest równe 0, a dla $p=1$ jest równe $\frac{1}{2}$.

Więzień X powinien mieć nadzieję, że strażnik bardzo nie lubił więźnia Y.

Trzy karty (jedna z wielu wersji **paradoksu Monty Halla**, w TVP był teleturniej „Idź na całość")

Na stole leżą koszulkami do góry, w nieznanej graczowi kolejności, trzy karty: As, Król i Dama. Jeżeli gracz odgadnie prawidłowo położenie Asa, wygrywa dużą nagrodę. Gracz wskazał kartę środkową i wtedy bankier mówi: „Chwileczkę. Odkryję jedną kartę z pozostałych dwóch, a ty się zastanów, czy chcesz zmienić swój wybór", po czym odkrywa pierwszą kartę z lewej i jest nią Król. Bankier zna położenie kart i odkrywa zawsze kartę różną od Asa. Jeżeli ma do wyboru dwie karty: Króla lub Damę, wybiera losowo każdą z nich z prawdopodobieństwem równym 1/2.

Czy gracz powinien zmienić swój wybór?

Typowa agitacja (błędna)

Zostały dwie karty, As i Dama. Jedną z nich ma bankier, a drugą gracz. Jest więc wszystko jedno, czy gracz zmieni swój wybór czy nie, w obu przypadkach prawdopodobieństwo wygranej jest równe 1/2.

Szczegółowe rozwiązanie

Zestawmy w tabeli wszystkie możliwe pary kart bankiera, kartę graczach i decyzję bankiera.

	karty bankiera	karta gracza	karta odkryta przez bankiera	prawdopodobieństwo odkrycia tej karty
1	A, K	D	K	$\frac{1}{3}$
2	A, D	K	D	$\frac{1}{3}$
3	K, D	A	K albo D	$\frac{1}{3}$

Zauważmy, że w trzecim przypadku bankier może pokazać K albo D.

W tym rozwiązaniu (przypadek klasyczny) przyjmiemy, że w takiej sytuacji bankier odkrywa każdą z tych kart z prawdopodobieństwem 1/2 (losowo wybiera kartę).

Mamy zatem cztery możliwości:

	karty bankiera	karta gracza	karta odkryta przez bankiera	prawdopodobieństwo odkrycia tej karty
1	A, K	D	K	$\frac{1}{3}$
2	A, D	K	D	$\frac{1}{3}$
3_1	K, D	A	K	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
3_2	K, D	A	D	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Rozważmy teraz przypadki, w których bankier pokazał Króla. Są to 1 oraz 3_1. Prawdopodobieństwo tego, że bankier pokaże Króla, jest równe $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ i stąd otrzymujemy, że prawdopodobieństwo tego, że gracz ma Asa, jeżeli bankier pokazał Króla, jest równe $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$, czyli ta informacja nic nie wniosła.

Właściwym postępowaniem (według kryterium większej szansy) jest więc zamiana kart.

Prawdopodobieństwo wygranej po zamianie jest równe $\frac{2}{3}$.

Uwaga

Są dwa zdarzenia:

A_1 — bankier ma Króla,

A_2 — bankier pokazał Króla.

$A_1 \supset A_2$ i $A_1 \neq A_2$.

W przypadku klasycznym zdarzenia: A_2 i „gracz ma Asa" są niezależne.

Wracając do problemu, odpowiedź będzie inna, gdyby wiadomo było, że bankier w sytuacji, gdy ma Króla i Damę, pokazuje Króla z prawdopodobieństwem p, a Damę z prawdopodobieństwem $1-p$, gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1$ (np. można wyobrazić sobie sytuację, gdy bankier bardzo nie lubi Króla, wtedy $p=0$).

Mamy zatem cztery możliwości, które przedstawimy w tabeli

	karty bankiera	karta gracza	karta odkryta przez bankiera	prawdopodobieństwo odkrycia tej karty
1	A, K	D	K	$\frac{1}{3}$
2	A, D	K	D	$\frac{1}{3}$
3_1	K, D	A	K	$\frac{1}{3} \cdot p = \frac{p}{3}$
3_2	K, D	A	D	$\frac{1}{3} \cdot (1-p) = \frac{1-p}{3}$

Prawdopodobieństwo tego, że bankier odkryje Króla, jest równe $\frac{1}{3} + \frac{p}{3} = \frac{1+p}{3}$ i stąd otrzymujemy, że prawdopodobieństwo tego, że gracz ma Asa, jeżeli bankier odkrył Króla, jest równe $\frac{\frac{p}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{p}{3}}=\frac{p}{1+p}$, $\left(0\leqslant\frac{p}{1+p}\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

Dla $p=0$ to prawdopodobieństwo jest równe 0, a dla $p=1$ jest równe $\frac{1}{2}$.

Właściwym postępowaniem (wg kryterium większej szansy) jest więc zamiana kart.

Prawdopodobieństwo wygranej jest nie mniejsze od $\frac{1}{2}$.

Gracz powinien mieć nadzieję, że bankier bardzo nie lubił Króla.

Uogólnienia paradoksu Monty Halla

Na stole, koszulkami do góry, leży, w nieznanej graczowi kolejności, siedem kart: A, K, D, W, 10, 9, 8. Gracz wskazuje trzy karty i jeżeli wśród jego kart jest As, wygrywa dużą nagrodę. Gracz wskazał trzy pierwsze od lewej karty i wtedy bankier mówi: „Chwileczkę. Odkryję trzy karty z pozostałych czterech, a ty się zastanów, czy chcesz zmienić swój wybór, tzn. zamienić trzy twoje wybrane karty na jedną, która pozostała”, po czym odkrywa trzy z prawej i jest to K, D, W. Bankier zna położenie kart i odkrywa zawsze karty różne od Asa. Jeżeli ma do wyboru trzy karty z czterech, wybiera losowo każdą „trójkę” z prawdopodobieństwem równym 1/4.

Czy gracz powinien zmienić swój wybór (trzy za jedną)?

Prawdopodobieństwo, że gracz wskazał karty, wśród których jest As, jest równe $\frac{3}{7}$. Prawdopodobieństwo, że wśród pozostałych czterech kart jest As, jest równe $\frac{4}{7}$.

Można przedstawić szczegółową analizę zadania w tabeli (jak poprzednio). W tym przypadku ograniczymy się do analizy końcowej, tzn. do wnioskowania w sytuacji, gdy bankier pokazał K, D, W.

	karty odkryte przez bankiera	karta zakryta	karty gracza	prawdopodobieństwo odkrycia tej karty
1	K, D, W	A	10, 9, 8	$\frac{1}{\binom{7}{4}}=\frac{1}{35}$
2	K, D, W	10	A, 9, 8	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{35}$
3	K, D, W	9	A, 10, 8	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{35}$
4	K, D, W	8	A, 10, 9	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{35}$

Prawdopodobieństwo tego, że bankier pokaże Króla, Damę i Waleta jest równe $\frac{1}{35}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{35}=\frac{1}{20}$ i stąd otrzymujemy, że prawdopodobieństwo tego, że gracz wskazał kary, wśród których jest As, jeżeli bankier pokazał Króla, Damę i Waleta jest równe $\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{35}}{\frac{1}{20}}=\frac{60}{140}=\frac{3}{7}$, czyli ta informacja nic nie wniosła.

Właściwym postępowaniem (wg kryterium większej szansy) jest więc zamiana trzech kart na jedną.

Prawdopodobieństwo wygranej po zamianie jest równe $\frac{4}{7}$.

Uwaga

Są dwa zdarzenia:

A_1 — bankier ma Króla, Damę, Waleta,

A_2 — bankier pokazał Króla, Damę, Waleta.

$A_1 \supset A_2$ i $A_1 \neq A_2$.

W przypadku klasycznym zdarzenia: A_2 i „gracz wskazał karty, wśród których jest As" są niezależne.

Pouczające jest rozważenie sytuacji szczególnych, np. gdy bankier zawsze, o ile to możliwe, pokazuje

a) Króla, Damę, Waleta,
b) Króla, Damę,
c) Króla.

Bankier pokazał Króla, Damę i Waleta. W przypadku

a) prawdopodobieństwo, że wśród kart wskazanych przez gracza jest As, jest równe 3/4, nie należy zatem się zamieniać (wg kryterium większej szansy),
b) prawdopodobieństwo, że wśród kart wskazanych przez gracza jest As, jest równe 3/5, również nie należy się zamieniać (wg kryterium większej szansy),
c) prawdopodobieństwo, że wśród kart wskazanych przez gracza jest As, jest równe 3/6=1/2, obie decyzje, zamieniać się lub nie, mają równe prawdopodobieństwo sukcesu.

7.4. Wzór na prawdopodobieństwo iloczynu

1. Jeżeli B jest zdarzeniem losowym zawartym w Ω i $P(B) > 0$, to dla każdego $A \subset \Omega$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

2. Jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω i $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Uwagi

Przy rozwiązywaniu zadań metodą drzewa mnożymy prawdopodobieństwa wzdłuż danej gałęzi drzewa. Jest to zastosowanie tego wzoru.

Przykład 4.

Według danych statystycznych prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest nosicielem wirusa X, który jest jedyną przyczyną choroby Z, jest równe 0,00372. Prawdopodobieństwo, że nosiciel wirusa X zachoruje na chorobę Z, jest równe 0,496. Obliczymy prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba zachoruje na chorobę Z.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

A — wybrana losowo osoba zachoruje na chorobę Z,

B — wybrana losowo osoba jest nosicielem wirusa X.

Mamy następujące dane: $P(B)=0,00372$, $P(A|B)=0,496$.

Zauważmy, że $A=A\cap B$, stąd $P(A)=P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=0,00184512$.

7.5. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym (zupełnym)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, P — prawdopodobieństwem określonym na wszystkich zdarzeniach losowych zawartych w Ω oraz niech $H_1, H_2, \ldots, H_n$ będą zdarzeniami losowym zawartymi w Ω takimi, że spełnione są jednocześnie trzy warunki:

1. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$,
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, gdzie $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ (zdarzenia $H_1, H_2, \ldots, H_n$ są parami rozłączne),
3. $P(H_i) > 0$ dla $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Wówczas dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwy jest wzór

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n) \tag{$*$}$$

Wzór $(*)$ nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.

Uwagi

1. Graficzna ilustracja tego twierdzenia to drzewo probabilistyczne.
2. Rozwiązując zadania metodą drzewa i rysujemy tylko istotne gałęzie, korzystamy z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym w następującej wersji:
   Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, P — prawdopodobieństwem określonym na wszystkich zdarzeniach losowych zawartych w Ω oraz niech A będzie zdarzeniem losowym zawartym w Ω.
   Jeżeli $H_1, H_2, \ldots, H_n$ są zdarzeniami losowym zawartymi w Ω takimi, że spełnione są jednocześnie trzy warunki:
   a) $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n \supset A$,
   b) $H_i \cap H_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, gdzie $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ (zdarzenia $H_1, H_2, \ldots, H_n$ są parami rozłączne),

c) $P(H_i) > 0$ dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Wówczas prawdziwy jest wzór

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \qquad (*)$$

Przykład 5. (schemat Polya)

W pojemniku jest $b+c$ kul, b kul białych i c kul czarnych. Z tego pojemnika losujemy jedną kulę, zwracamy ją do pojemnika i dokładamy do pojemnika s kul koloru wylosowanego. Następnie losujemy jedną kulę z pojemnika, w którym jest teraz $b+c+s$ kul. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w drugim losowaniu.

Szkic rozwiązania

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

B_1 — w pierwszym losowaniu otrzymamy kulę białą,

C_1 — w pierwszym losowaniu otrzymamy kulę czarną,

B_2 — w drugim losowaniu otrzymamy kulę białą.

Zdarzenia B_1, C_1 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, stąd

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|C_1)P(C_1).$$

$$P(B_1) = \frac{b}{b+c}, \quad P(C_1) = \frac{c}{b+c}, \quad P(B_2|B_1) = \frac{b+s}{b+c+s}, \quad P(B_2|C_1) = \frac{b}{b+c+s}.$$

Zatem

$$P(B_2) = \frac{b+s}{b+c+s} \cdot \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+c+s} \cdot \frac{c}{b+c} = \frac{b}{b+c} = P(B_1).$$

Zadanie można rozwiązać za pomocą drzewa.

Można wykazać, że jeżeli będziemy powtarzali to doświadczenie tzn. będziemy zwracać kulę, dosypywać s kul koloru wylosowanego, losować, zwracać, dosypywać, ..., to prawdopodobieństwo zdarzenia B_n polegającego na otrzymaniu kuli białej w n-tym losowaniu jest równe $\frac{b}{b+c}$ dla każdego n. Stąd wynika, że dla każdych n, m prawdziwa jest równość $P(B_n|B_m) = P(B_m|B_n)$.

Zadanie 7.

W pojemniku jest dziesięć monet. Siedem jest prawidłowych, a trzy mają orły po obu stronach. Losowo wybraną monetą rzucono pięć razy i otrzymano pięć razy orła. Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucano monetą z orłami po obu stronach.

Szkic rozwiązania

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

H_1 — wylosujemy monetę z orłami po obu stronach,

H_2 — wylosujemy monetę prawidłową,

A — otrzymamy pięć razy orła.

Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(H_1|A)$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A \cap H_1)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}.$$

Zdarzenia H_1, H_2 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

$$H_1 \cup H_2 = \Omega, \quad H_1 \cap H_2 = \emptyset, \quad P(H_1) = \frac{3}{10}, \quad P(H_2) = \frac{7}{10}, \quad P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

Zdarzenia H_1, H_2 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2).$$

Stąd

$$P(H_1|A) = \frac{1 \cdot \frac{3}{10}}{1 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{32} \cdot \frac{7}{10}} = \frac{96}{103}.$$

Zadanie 8.

Na półce stoją dwa pojemniki. W pierwszym pojemniku jest pięć kul: cztery białe i jedna czarna, w drugim są trzy kule: dwie białe i jedna czarna. Z losowo wybranego pojemnika wybieramy losowo dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że druga wylosowana kula będzie biała, jeżeli wiadomo, że pierwsza wylosowana kula była biała.

Szkic rozwiązania

Wprowadźmy oznaczenia dla zdarzeń:

H_1 — wylosujemy pierwszy pojemnik,

H_2 — wylosujemy drugi pojemnik,

B_1 — pierwsza wylosowana kula będzie biała,

B_2 — druga wylosowana kula będzie biała.

Mamy obliczyć $P(B_2|B_1) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$.

Zdarzenia H_1,H_2 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$H_1 \cup H_2 = \Omega, H_1 \cap H_2 = \emptyset, P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2} > 0.$$

$$P(B_1) = P(B_1|H_1)P(H_1) + P(B_1|H_2)P(H_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{15}.$$

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2 \cap B_1|H_1)P(H_1) + P(B_2 \cap B_1|H_2)P(H_2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{122}{225}.$$

$$P(B_2|B_1) = \frac{\frac{122}{225}}{\frac{11}{15}} = \frac{122}{165}.$$

Przykład 6.

(paradoks Simpsona) Przy leczeniu pewnej choroby testowano dwie terapie, terapię X oraz terapię Y.

Okazało się, że

- procent kobiet, dla których terapia Y była skuteczniejsza, był większy od procentu kobiet, dla których terapia X była skuteczniejsza,
- procent mężczyzn, dla których terapia Y była skuteczniejsza był większy od procentu mężczyzn, dla których terapia X była skuteczniejsza,

i jednocześnie

- procent wszystkich pacjentów, dla których terapia X była skuteczniejsza był większy od procentu wszystkich pacjentów, dla których terapia Y była skuteczniejsza.

Jak to możliwe?

Ten paradoks opisał w 1951 r. H. Simpson.

Dla zrozumienia tego paradoksu przedstawimy następujący przykład.

Są cztery pojemniki: X_K, X_M, Y_K, Y_M. Zawartość pojemników prezentuje poniższa tabela

	X	Y
K	70 kul białych 30 kul czarnych	18 kul białych 2 kul czarnych
M	2 kule białe 18 kul czarnych	30 kul białych 70 kul czarnych

Losujemy jedną kulę z pojemnika i przez B oznaczamy zdarzenie polegające na otrzymaniu kuli białej. Zauważmy, że

$$P(B|X_K) = \frac{70}{100} < \frac{18}{20} = P(B|Y_K),$$

$$P(B|X_M) = \frac{2}{20} < \frac{30}{100} = P(B|Y_M).$$

Teraz zsypujemy kule z pojemników X_K, X_M do pojemnika X oraz zsypujemy kule z pojemników Y_K, Y_M do pojemnika Y. Zawartość pojemników X i Y prezentuje tabela

X	Y
72 kule białe 48 kul czarnych	48 kul białych 72 kule czarne

Teraz

$$P(B|X) = \frac{72}{120} > \frac{48}{120} = P(B|Y).$$

Rozdział 8

Elementy analizy matematycznej w zadaniach na egzaminie maturalnym

Piotr Ludwikowski
konsultacja: Leszek Sochański

Nowa podstawa programowa zawiera hasła, które przez wiele lat nie były treścią nauczania w szkołach ponadgimnazjalnych. Autorzy nowej podstawy programowej starali się tak sformułować zakres wymagań, aby uniknąć z jednej strony nadmiernego formalizmu, a z drugiej strony nie powodować uczenia się algorytmów rozwiązywania poszczególnych typów zadań na pamięć, bez zrozumienia istoty problemów, których dotyczyły. Poniżej lista nowych haseł podstawy programowej dotyczących wstępu do analizy matematycznej.

Poziom rozszerzony

5. Ciągi. Uczeń:

1. wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
2. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów;
3. rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

11. Rachunek różniczkowy. Uczeń:

1. oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;
2. oblicza pochodne funkcji wymiernych;
3. korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;
4. korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji;
5. znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;
6. stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Warto zwrócić uwagę na komentarz, o który autorzy nowej podstawy uzupełnili jej treści:

> ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI
> „W przypadku uczniów zdolnych, można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki."

Rodzaje zadań egzaminacyjnych w arkuszu maturalnym na poziomie rozszerzonym:

1. Zadania zamknięte (wielokrotnego wyboru lub prawda fałsz).
2. Zadania z kodowaną odpowiedzią.
3. Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi.

4. Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

W przypadku zadań kodowanych sposób kodowania zostanie dokładnie opisany (np. *zakoduj cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku*).

8.1. Przykłady

Zadanie 1. (szereg geometryczny)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, o ilorazie $q = \frac{2}{3}$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa -6. Oblicz $a_3 - a_1$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Ze wzoru na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $S = \frac{a_1}{1-q}$ (dla $|q| < 1$) obliczamy a_1: $-6 = \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}}$, stąd $a_1 = -2$. Obliczamy a_3:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 = (-2) \cdot \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}.$$

Zatem $a_3 - a_1 = -\frac{8}{9} - (-2) = \frac{10}{9}$.

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 1, 1, 1.

Zadanie 2. (granica ciągu)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5 - 2n^3 + 3n}{1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4 + 6n^5}$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 2n^3 + 3n}{1 + 2n + 3n^2 + 4n^3 + 5n^4 + 6n^5} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^4}\right)}{n^5\left(\frac{1}{n^5} + \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} + 6\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^4}}{6 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 1, 6, 6.

Zadanie 3. (granica ciągu)

Dla liczby $p \neq 0$ określamy ciąg $a_n = \frac{(7p-1)n^2 - 3pn + 2p}{1+pn^2}$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz, dla jakiej wartości p granica ciągu (a_n) jest równa 0. Zakoduj pierwszą, drugą i trzecią cyfrę po przecinku otrzymanej liczby p.

Rozwiązanie

Wyznaczamy granicę ciągu (a_n) w zależności od p:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7p-1)n^2 - 3pn + 2p}{1+pn^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(7p - 1 - \frac{3p}{n} - \frac{2p}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2} + p\right)} = \frac{7p-1}{p}.$$

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{7p-1}{p} = 0,$$

$$p = \frac{1}{7}.$$

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 1, 4, 2.

Zadanie 4. (granica ciągu)

Ciągi (a_n), (b_n) określone są następująco: $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 2$ oraz $b_n = \frac{n^3 - 11n + 5}{2n}$, dla $n \geqslant 1$. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$. Zakoduj cyfrę jedności oraz pierwszą i drugą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2 - 2 - \frac{n^3 - 11n + 5}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 4n - n^3 + 11n - 5}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n-5}{2n} = \frac{7}{2}.$$

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 3, 5, 0.

Zadanie 5. (granica ciągu)

Ciągi (a_n), (b_n) określone są dla $n \geqslant 1$ wzorami: $a_n = -3n^2(n-5)$ oraz $b_n = (1-2n)^3$. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Zakoduj cyfrę jedności oraz pierwszą i drugą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^2(n-5)}{(1-2n)^3} = \frac{3}{8}$.

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 0, 3, 7.

Zadanie 6. (granica funkcji)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2-x^2}{x+2}$ dla $x\neq-2$. Granica $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ jest równa

A. $-\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Odpowiedź: B.

Rozwiązanie

Obliczamy:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2-x^2}{x+2}=\frac{2-4}{2+2}=-\frac{1}{2}.$$

Zadanie 7. (granica funkcji)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{16-x^2}{x+4}$ dla $x\neq-4$. Granica $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ jest równa

A. $-\infty$. B. 0. C. 8. D. $+\infty$.

Odpowiedź: C.

Rozwiązanie

Przekształcamy wzór danej funkcji:

$$f(x)=\frac{16-x^2}{x+4}=\frac{(4-x)(4+x)}{x+4}$$

i obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -4}\frac{(4-x)(4+x)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(4-x)=8.$$

Zadanie 8. (pochodna funkcji w punkcie)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ dla $x\neq 3$. Granica $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ jest równa

A. $-\infty$. B. 0. C. 6. D. $+\infty$.

Odpowiedź: A.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 3^-} 2x}{\lim_{x\to 3^-} x-3}=\frac{6}{0^-}=-\infty.$$

Zadanie 9. (pochodna funkcji w punkcie)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{5(x+1)^2}{2x-1}$ dla $x\neq\frac{1}{2}$. Oblicz wartość pochodnej funkcji f dla $x=3$. Zakoduj cyfrę jedności oraz pierwszą i drugą cyfrę po przecinku otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Przekształcamy wzór funkcji f i obliczamy pochodną tej funkcji:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5(x+1)^2}{2x-1} = \frac{5x^2+10x+5}{2x-1},\\
f'(x) &= \frac{\left(5x^2+10x+5\right)'(2x-1)-\left(5x^2+10x+5\right)(2x-1)'}{(2x-1)^2} =\\
&= \frac{(10x+10)(2x-1)-\left(5x^2+10x+5\right)\cdot 2}{(2x-1)^2} =\\
&= \frac{10x^2-10x-20}{(2x-1)^2} = \frac{10\left(x^2-x-2\right)}{(2x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Zatem $f'(3)=\frac{40}{25}=1,6$.

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 1, 6, 0.

Zadanie 10. (równanie stycznej)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych i leżący na wykresie tej funkcji punkt A o współrzędnych $(3,f(3))$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A.

Rozwiązanie

Styczna do wykresu funkcji o wzorze $y=f(x)$ w punkcie $A=(x_0,f(x_0))$ ma równanie postaci $y=ax+b$, gdzie współczynnik kierunkowy a jest równy $a=f'(x_0)$. W naszym przypadku $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+1$ oraz $x_0=3$.

Mamy zatem $f'(x)=-x^2+4x$, skąd dostajemy $a=-3^2+4\cdot 3=3$. Punkt A ma współrzędne $(3,\ f(3))$, czyli $A=(3,\ 10)$. Prosta o równaniu $y=3x+b$ma przechodzić przez punkt A, więc $10=3\cdot 3+b$. Zatem $b=1$ i ostatecznie równanie stycznej ma postać $y=3x+1$.

Zadanie 11. (monotoniczność)

Funkcja f dana jest wzorem $f(x)=x^3+mx^2+4x+1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f jest rosnąca dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=3x^2+2mx+4$. Na to, by funkcja f była rosnąca w całej dziedzinie, wystarczy w tym przypadku, by pochodna funkcji f, będąca funkcją kwadratową, przyjmowała wartości nieujemne każdej liczby rzeczywistej x. Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2+2mx+4$:

$$\Delta=(2m)^2-4\cdot3\cdot4=4m^2-48$$

i wyznaczamy te wartości parametru m, dla których ten wyróżnik jest niedodatni. Otrzymujemy $m\in\left\langle-2\sqrt{3},\,2\sqrt{3}\right\rangle$.

Zatem dla $m\in\left\langle-2\sqrt{3},\,2\sqrt{3}\right\rangle$ funkcja f jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.

Zadanie 12. (optymalizacja)

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany, w których przekątna ma długość d, natomiast podstawa jest prostokątem o bokach $3x$, $4x$ dla pewnego x. Dla jakiej wartości x taki prostopadłościan ma największe pole powierzchni bocznej?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez h wysokość prostopadłościanu. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość c przekątnej podstawy:

$$c=\sqrt{(3x)^2+(4x)^2}=5x$$

oraz zapisujemy zależność przekątnej prostopadłościanu od przekątnej podstawy i wysokości prostopadłościanu:

$$d^2=h^2+(5x)^2=h^2+25x^2. \tag{8.1}$$

Pole P powierzchni bocznej tego prostopadłościanu jest równe $P=14xh$.

Z równości (8.1) wyznaczamy zależność h od x: $h=\sqrt{d^2-25x^2}$ i określamy funkcję $P(x)$ opisującą pole powierzchni bocznej prostopadłościanu w zależności od x:

$P(x)=14x\sqrt{d^2-25x^2}$ dla $x\in\left(0,\dfrac{d}{5}\right)$.

Wzór tej funkcji zapiszemy w postaci $P(x)=14\sqrt{d^2x^2-25x^4}$ dla $x\in\left(0,\dfrac{d}{5}\right)$.

Rozważmy funkcję pomocniczą określoną wzorem $f(x)=d^2x^2-25x^4$ dla $x\in\left(0,\dfrac{d}{5}\right)$.

Z faktu, że funkcja $g(t)=\sqrt{t}$ jest rosnąca w $\langle0;+\infty)$ wynika, że funkcje P oraz f są rosnące (malejące) w tych samych przedziałach oraz mają ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) dla tych samych argumentów.

Wyznaczymy wartość największą funkcji f w przedziale $\left(0,\dfrac{d}{5}\right)$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=2d^2x-100x^3=2x\left(d^2-50x^2\right).$$

W przedziale $\left(0,\dfrac{d}{5}\right)$ pochodna ma jedno miejsce zerowe $x=\dfrac{d\sqrt{2}}{10}$,

$f'(x)>0$ dla $x\in\left(0,\dfrac{d\sqrt{2}}{10}\right)$,

$f'(x)<0$ dla $x\in\left(\frac{d\sqrt{2}}{10},\frac{d}{5}\right)$.

Wynika stąd, że dla $x=\frac{d\sqrt{2}}{10}$ funkcja f ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie wartość największa, bo w przedziale $\left(0,\frac{d\sqrt{2}}{10}\right\rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\left\langle\frac{d\sqrt{2}}{10},0\right)$ funkcja f jest malejąca.

Odpowiedź

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu, który ma największe pole powierzchni bocznej, to: $\frac{3d\sqrt{2}}{10}$, $\frac{2d\sqrt{2}}{5}$.

Uwaga

Zdający z równości (8.1) może wyznaczyć zależność x od h: $x=\frac{1}{5}\sqrt{d^2-h^2}$, otrzymując funkcję $P(h)$ opisującą pole powierzchni bocznej prostopadłościanu w zależności od h: $P(h)=\frac{14}{5}h\sqrt{d^2-h^2}$ dla $h\in(0,d)$.

Funkcja ta przyjmuje największą wartość dla $h=\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Metoda rozwiązania w tym przypadku jest analogiczna.

Przedstawiamy schemat oceniania tego zadania.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

1. **Pierwszy etap** składa się z trzech części:
   a) zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie, że
   $$d^2=h^2+25x^2 \quad \text{oraz} \quad c^2=(3x)^2+(4x)^2=25x^2,$$
   b) zapisanie pola P powierzchni bocznej prostopadłościanu jako funkcji jednej zmiennej $P(x)=14x\sqrt{d^2-25x^2}$,
   c) zapisanie, że dziedziną funkcji $P(x)=14x\sqrt{d^2-25x^2}$ jest przedział $\left(0,\frac{d}{5}\right)$.

   Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.
2. **Drugi etap** składa się z trzech części:
   a) zapisanie wzoru pochodnej funkcji, np.: $f'(x)=2d^2x-100x^3=2x\left(d^2-50x^2\right)$,
   b) zapisanie, że w przedziale $\left(0,\frac{d}{5}\right)$ pochodna funkcji f' ma jedno miejsce zerowe $x=\frac{d\sqrt{2}}{10}$,

c) zapisanie wraz z uzasadnieniem, że dla $x=\frac{d\sqrt{2}}{10}$ funkcja P osiąga największą wartość.

Oczekujemy, że zdający po zapisaniu, że w punkcie $x=\frac{d\sqrt{2}}{10}$ funkcja P osiąga maksimum lokalne, uzasadni, że maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością tej funkcji. Wystarczy, jeżeli zdający zapisze, że w przedziale $\left(0, \frac{d\sqrt{2}}{10}\right\rangle$ funkcja P jest rosnąca, zaś w przedziale $\left\langle \frac{d\sqrt{2}}{10}, 0\right)$ jest malejąca.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

3. **Trzeci etap**.

1 punkt zdający otrzyma za zapisanie długości krawędzi podstawy prostopadłościanu o największym polu powierzchni bocznej: $\frac{3d\sqrt{2}}{10}, \frac{2d\sqrt{2}}{5}$.

Uwaga

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.

Zadanie 13. (liczba pierwiastków równania)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=(x-2)(x+6)^2$. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x)=12$.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=1\cdot(x+6)^2+(x-2)(2x+12)=(x+6)(x+6+2x-4)=(x+6)(3x+2)=3(x+6)\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f. Miejscami zerowymi pochodnej są liczby -6 i $-\frac{2}{3}$. Rozwiązujemy nierówności $f'(x)>0$ oraz $f'(x)<0$ i otrzymujemy:

$$f'(x)>0,\ \text{gdy}\ x\in(-\infty,-6)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right) \qquad \text{oraz} \qquad f'(x)<0,\ \text{gdy}\ x\in\left(-6,-\frac{2}{3}\right).$$

Dla $x=-6$ spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum i jest to maksimum lokalne, które jest równe $f(-6)=0$. Dla $x=-\frac{2}{3}$ również spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum i jest to minimum lokalne, które jest równe $f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^2=-\frac{2048}{27}$. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x>2$ i jest w tym przedziale rosnąca. Wynika stąd, że równanie $f(x)=12$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dodatek
Zestawy zadań

Dodatek A

Zestaw zadań I

Halina Kałek
Edyta Marczewska
Elżbieta Sepko-Guzicka
Leszek Sochański

Zadanie 1.

Oblicz granicę ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+4}+\frac{3n-4}{6n+5}\right)$.

Rozwiązanie

Ta granica jest równa

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+4}+\frac{3n-4}{6n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{7}{n}}{8+\frac{4}{n}}+\frac{3-\frac{4}{n}}{6+\frac{5}{n}}\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}=0,875.$$

Zadanie 2.

Dana jest funkcja f określona wzorem: $f(x)=\frac{2x+7}{x^2+3}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Mamy:

$$f'(x)=\frac{(2x+7)'\left(x^2+3\right)-(2x+7)\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2\left(x^2+3\right)-2x(2x+7)}{\left(x^2+3\right)^2}=$$
$$=\frac{-2x^2-14x+6}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Zatem $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-2\cdot\frac{1}{4}+7+6}{\left(\frac{13}{4}\right)^2}=\frac{200}{169}$.

Zadanie 3.

Dany jest okrąg o środku w punkcie $S=(60,40)$ i promieniu 97. Prosta o równaniu $3x+4y+20=0$ przecina ten okrąg w dwóch punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB.

Rozwiązanie

Niech C będzie środkiem odcinka AB. Z założenia S jest środkiem danego okręgu. Wówczas trójkąt ACS jest prostokątny, z kątem prostym przy wierzchołku C. Zatem z twierdzenia Pitagorasa mamy $AC^2 = AS^2 - CS^2$. Z założenia wiemy, że promień $AS = 97$ oraz odległość prostej k od środka okręgu

$$CS = \frac{|3\cdot 60 + 4\cdot 40 + 20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 72.$$

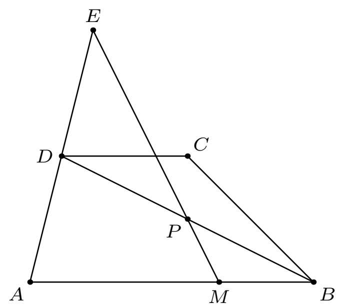
Zatem

$$AC^2 = 97^2 - 72^2 = (97-72)\cdot(97+72) = 25\cdot 169 = 5^2\cdot 13^2 = 65^2.$$

Stąd wynika, że $AC = 65$, a więc $AB = 130$.

Zadanie 4.

Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $AE = 2\cdot AD$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $AM = 2\cdot MB$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P. Udowodnij, że $BP = PD$.



I sposób rozwiązania

Niech N będzie punktem przecięcia odcinka EM z prostą DC.

Ponieważ $AB \parallel CD$, więc odcinek DN jest równoległy do AM, a ponieważ D jest środkiem odcinka AE, więc N jest środkiem odcinka ME. Oznacza to, że odcinek DN łączy środki boków AE i ME trójkąta AME. Stąd wnioskujemy, że

$$DN = \frac{1}{2}AM.$$

Stąd z kolei i z założenia $AM = 2\cdot MB$ wynika, że

$$DN = MB.$$

Równość i równoległość odcinków DN i MB oznacza, że trójkąty PDN i PBM są przystające. Stąd wynika więc, że

$$BP = PD.$$

To właśnie należało udowodnić.

II sposób rozwiązania

Niech N będzie punktem przecięcia odcinka EM z prostą DC. Ponieważ $AB \parallel CD$, więc odcinek DN jest równoległy do AM. Wnioskujemy stąd, że

$$\sphericalangle EDN = \sphericalangle EAM \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle END = \sphericalangle EMA.$$

To oznacza, że trójkąty DNE i AME są podobne (cecha *kąt-kąt* podobieństwa trójkątów). Stąd wynika proporcja

$$\frac{DE}{DN} = \frac{AE}{AM},$$

ale $AE = 2 \cdot AD$, czyli $AE = 2 \cdot DE$, więc

$$\frac{DE}{DN} = \frac{2 \cdot DE}{AM}.$$

Stąd wnioskujemy, że $AM = 2 \cdot DN$. Równość ta, wraz z równością $AM = 2 \cdot MB$, prowadzi do wniosku, że

$$DN = MB.$$

To z kolei, wraz z równościami kątów $\sphericalangle PMB = \sphericalangle PND$ i $\sphericalangle PBM = \sphericalangle PDN$, prowadzi do wniosku, że trójkąty MBP i NDP są przystające.

Stąd wnioskujemy, że boki BP i DP tych trójkątów mają tę samą długość, co kończy dowód.

Zadanie 5.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+7}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

I sposób rozwiązania

Zauważamy, że aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+7}$ wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru m równanie $\dfrac{x+3}{x^2+7} = m$ ma rozwiązanie.

Przekształcamy to równanie i zapisujemy w postaci równoważnej $mx^2 - x + 7m - 3 = 0$.

Dla $m = 0$ równanie $mx^2 - x + 7m - 3 = 0$ ma postać $-x - 3 = 0$ i ma rozwiązanie $x = -3$. Zatem 0 należy do zbioru wartości funkcji f.

Dla $m \neq 0$ jest to równanie kwadratowe o wyróżniku $\Delta = 1 - 4m(7m-3)$. Wystarczy zatem sprawdzić, dla jakich $m \neq 0$ wyróżnik jest nieujemny. Mamy więc nierówność $28m^2 - 12m - 1 \leqslant 0$ (gdzie $m \neq 0$), której zbiorem rozwiązań jest przedział $\left\langle -\dfrac{1}{14}, \dfrac{1}{2} \right\rangle$ z wyłączeniem liczby 0.

Ponieważ dla $m = 0$ równanie $mx^2 - x + 7m - 3 = 0$ ma rozwiązanie, więc równanie $\dfrac{x+3}{x^2+7} = m$ ma rozwiązanie dla $m \in \left\langle -\dfrac{1}{14}, \dfrac{1}{2} \right\rangle$.

Ostatecznie stwierdzamy, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+7}$ jest przedział $\left\langle -\dfrac{1}{14}, \dfrac{1}{2} \right\rangle$.

II sposób rozwiązania

Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=\frac{x+3}{x^2+7}$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji $f'(x)=\frac{1\left(x^2+7\right)-2x(x+3)}{(x^2+7)^2}=\frac{-x^2-6x+7}{(x^2+7)^2}$.

Następnie znajdujemy miejsca zerowe tej pochodnej:

$$\frac{-x^2-6x+7}{(x^2+7)^2}=0,$$

co jest równoważne równaniu $-x^2-6x+7=0$, stąd $x_1=-7$, $x_2=1$.

Teraz zauważamy, że:

a) jeśli $x<-7$, to $f'(x)<0$,
b) jeśli $-7<x<1$, to $f'(x)>0$,
c) jeśli $x>1$, to $f'(x)<0$.

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty\,,\,-7\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -7,1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1\,,\,+\infty)$.

Następnie obliczamy $f(-7)=-\frac{1}{14}$, $f(1)=\frac{1}{2}$.

Ponadto

- jeśli $x\leqslant -7$, to $f(x)<0$,
- jeśli $x\geqslant 1$, to $f(x)>0$.

Stąd wynika, że:

- jeśli $x\leqslant -7$, to $-\frac{1}{14}\leqslant f(x)<0$,
- jeśli $x\geqslant 1$, to $0<f(x)\leqslant \frac{1}{2}$.

Zatem $-\frac{1}{14}$ jest najmniejszą wartością funkcji f, a $\frac{1}{2}$ jest największą wartością tej funkcji.

Z ciągłości funkcji f wynika, że zbiorem jej wartości jest przedział $\left\langle -\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right\rangle$.

Zadanie 6.

Oblicz, ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występuje co najmniej jedna siódemka.

I sposób rozwiązania (dopełnienie)

Obliczamy, ile jest nieparzystych liczb naturalnych czterocyfrowych. Pierwszą cyfrę (tysięcy) możemy wybrać na 9 sposobów, następne dwie cyfry na 10 sposobów i ostatnią (jedności) na 5 sposobów. Mamy zatem $9\cdot 10^2\cdot 5=4500$ liczb czterocyfrowych nieparzystych.

Obliczamy, ile jest nieparzystych liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których nie występuje cyfra 7. Pierwszą cyfrę możemy wówczas wybrać na 8 sposobów, każdą z następnych dwóch na 9 sposobów i cyfrę jedności na 4 sposoby. Mamy zatem $8\cdot 9^2\cdot 4=2592$ takich liczb czterocyfrowych nieparzystych.

Stąd wnioskujemy, że liczb nieparzystych czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym co najmniej jedna cyfra jest siódemką, jest $4500-2592=1908$ (liczby te należą do zbioru liczb czterocyfrowych nieparzystych i nie należą do zbioru nieparzystych liczb czterocyfrowych, w zapisie których nie występuje cyfra 7).

Uwaga

Możemy także zauważyć, że jest 9000 liczb czterocyfrowych, a ponieważ co druga jest nieparzysta, to istnieje 4500 liczb czterocyfrowych nieparzystych.

II sposób rozwiązania (liczba siódemek)

Rozważamy cztery parami rozłączne zbiory nieparzystych liczb czterocyfrowych:

1. Zbiór liczb, w których zapisie dziesiętnym cyfra 7 występuje dokładnie **jeden raz**.
2. Zbiór liczb, w których zapisie dziesiętnym cyfra 7 występuje dokładnie **dwa razy**.
3. Zbiór liczb, w których zapisie dziesiętnym cyfra 7 występuje dokładnie **trzy razy**.
4. Zbiór liczb, w których zapisie dziesiętnym cyfra 7 występuje **cztery razy**.

Najpierw obliczamy, ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych, w zapisie których cyfra 7 występuje dokładnie **jeden raz**.

1. Jeśli pierwszą cyfrą (tysięcy) jest siódemka, to dwie następne cyfry możemy wybrać na 9 sposobów, a cyfrę jedności na 4 sposoby. Mamy zatem $9^2\cdot 4=324$ takich liczb.
2. Jeśli siódemka jest cyfrą setek, to cyfrę tysięcy możemy wybrać na 8 sposobów, cyfrę dziesiątek na 9 sposobów i cyfrę jedności na 4 sposoby. Takich liczb jest $8\cdot 9\cdot 4=288$.
3. Analogicznie wykazujemy, że jest 288 liczb, w zapisie których cyfra dziesiątek jest siódemką.
4. Jeśli siódemka jest cyfrą jedności, to cyfrę tysięcy możemy wybrać na 8 sposobów, a każdą z dwóch następnych cyfr na 9 sposobów. Takich liczb jest zatem $8\cdot 9^2=648$.

Mamy więc $324+288+288+648=1548$ nieparzystych liczb czterocyfrowych, w zapisie których cyfra 7 występuje jeden raz.

Następnie obliczamy, ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych, w zapisie których cyfra 7 występuje dokładnie **dwa razy**.

1. Jeśli dwie pierwsze cyfry to siódemki, to następną cyfrę możemy wybrać na 9 sposobów, a cyfrę jedności na 4 sposoby. Mamy zatem $9\cdot 4=36$ takich liczb.
2. Analogicznie wykazujemy, że jest 36 liczb, w zapisie których pierwszą i trzecią cyfrą jest siódemka.
3. Jeśli pierwszą i ostatnią cyfrą jest siódemka, to każdą z cyfr: setek i dziesiątek możemy wybrać na 9 sposobów. Mamy zatem $9^2=81$ takich liczb.
4. Jeśli drugą i trzecią cyfrą jest siódemka, to cyfrę tysięcy możemy wybrać na 8 sposobów i cyfrę jedności na 4 sposoby. Takich liczb jest $8\cdot 4=32$.
5. Jeśli drugą i czwartą cyfrą jest siódemka, to cyfrę tysięcy możemy wybrać na 8 sposobów, a cyfrę dziesiątek na 9 sposobów. Mamy zatem $8\cdot 9=72$ takie liczby.

6. Jeśli trzecią i czwartą cyfrą jest siódemka, to cyfrę tysięcy możemy wybrać na 8 sposobów i cyfrę setek na 9 sposobów. Takich liczb jest $8 \cdot 9 = 72$.

Mamy więc $36+36+81+32+72+72=329$ nieparzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfra 7 występuje dwa razy.

Obliczamy, ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych, w zapisie których cyfra 7 występuje dokładnie **trzy razy**.

1. Jeśli cyfrą jedności nie jest cyfra 7, to mamy 4 takie liczby (cyfrę jedności możemy wybrać na 4 sposoby spośród cyfr nieparzystych $1,3,5,9$).
2. Jeśli cyfrą dziesiątek nie jest cyfra 7, to mamy 9 takich liczb (cyfrę dziesiątek możemy wybrać na 9 sposobów spośród cyfr $0,1,2,3,4,5,6,8,9$).
3. Analogicznie wykazujemy, że jest 9 liczb, w zapisie których cyfra setek nie jest siódemką.
4. Jeśli cyfra 7 nie jest cyfrą tysięcy, to mamy 8 takich liczb (cyfrę tysięcy możemy wybrać na 8 sposobów spośród cyfr $1,2,3,4,5,6,8,9$).

Mamy więc $4+9+9+8=30$ nieparzystych liczb, w zapisie których cyfra 7 występuje trzy razy.

Ponadto jest jedna liczba czterocyfrowa nieparzysta, w zapisie której występują 4 siódemki.

Z reguły dodawania mamy: $1548+329+30+1=1908$ nieparzystych liczby czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym co najmniej jedna cyfra to 7.

Zadanie 7.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{2}{\left(\sqrt{3}\right)^n} \text{ dla } n = 1,2,3,\ldots.$$

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ponieważ $|q| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| < 1$, więc mamy $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}+1$.

Zadanie 8.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 - 3x + 1$ i leżący na wykresie tej funkcji punkt A o współrzędnej x równej 2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A.

Rozwiązanie

Styczna do wykresu funkcji o wzorze $y = f(x)$ w punkcie $A = (x_0, f(x_0))$ ma równanie postaci $y = ax + b$, gdzie współczynnik kierunkowy a jest równy $a = f'(x_0)$. W naszym przypadku $f(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $x_0 = 2$.

Mamy zatem $f'(x)=3x^2-3$, skąd dostajemy $a=3\cdot 2^2-3=9$. Punkt A ma współrzędne $(2, f(2))$, czyli $A=(2,3)$. Prosta o równaniu $y=9x+b$ ma przechodzić przez punkt A, więc $3=9\cdot 2+b$. Zatem $b=-15$ i ostatecznie równanie stycznej ma postać $y=9x-15$.

Zadanie 9.

Rozwiąż równanie $\sin 4x-\cos 5x=0$ w przedziale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

I sposób rozwiązania

Równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\sin(4x)=\cos(5x).$$

Ponieważ $\cos(5x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$\sin(4x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right).$$

Stąd wynika, że

$4x=\frac{\pi}{2}-5x+2k\pi$ lub $4x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem $x=\frac{\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{9}$ lub $x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wybierając te rozwiązania, które należą do przedziału $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ dostajemy:

$$x=\frac{\pi}{18},\qquad x=\frac{5\pi}{18},\qquad x=\frac{\pi}{2}.$$

II sposób rozwiązania

Ponieważ $\cos(5x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$\sin(4x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0.$$

Ze wzoru na różnicę sinusów otrzymujemy

$$2\cos\frac{4x+\frac{\pi}{2}-5x}{2}\sin\frac{4x-\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)}{2}=0.$$

Stąd $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$ lub $\sin\left(\frac{9}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Zatem $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ lub $\frac{9}{2}x-\frac{\pi}{4}=k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, czyli $x=-\frac{\pi}{2}-2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{9}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wybierając te rozwiązania, które należą do przedziału $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ dostajemy:

$$x=\frac{\pi}{18},\qquad x=\frac{5\pi}{18},\qquad x=\frac{\pi}{2}.$$

Zadanie 10.

Wykaż, że jeżeli zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ są takie, że $P(A) = 0,6$ oraz $P(B) = 0,8$, to $P(A|B) \geqslant 0,5$. ($P(A|B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B).

Rozwiązanie

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Nierówność $P(A|B) \geqslant 0,5$ jest równoważna nierówności $\dfrac{P(A \cap B)}{0,8} \geqslant 0,5$, więc wystarczy wykazać, że $P(A \cap B) \geqslant 0,4$.

Ponieważ $P(A \cup B) \leqslant 1$ oraz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, więc $P(A \cap B) \geqslant 0,6 + 0,8 - 1 = 0,4$, co należało udowodnić.

Zadanie 11.

Niech $m = \log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27 = \dfrac{3(1-m)}{m}$.

I sposób rozwiązania

Zauważmy, że $\log_7 21 = \dfrac{1}{\log_{21} 7} = \dfrac{1}{m}$.

Zapisujemy kolejno

$$\log_7 27 = \log_7 3^3 = 3\log_7 3 = 3\log_7\left(\frac{21}{7}\right) = 3(\log_7 21 - \log_7 7) = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3 \cdot \frac{1-m}{m}.$$

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Zauważamy kolejno, że

$$\frac{3(1-m)}{m} = 3\left(\frac{1}{m} - 1\right) = 3(\log_7 21 - 1) = 3(\log_7 21 - \log_7 7) = 3\log_7 \frac{21}{7} = \log_7 3^3 = \log_7 27,$$

co kończy dowód.

Zadanie 12.

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\dfrac{2n-10}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{30}$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\left|\dfrac{2n-10}{3n+1} - \dfrac{2}{3}\right| < \dfrac{1}{30}$. Stąd kolejno otrzymujemy:

$$\left|\frac{3(2n-10) - 2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{30},$$

$$\left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right| < \frac{1}{30}.$$

Wartość bezwzględna ilorazu jest równa ilorazowi wartości bezwzględnych, więc

$$\frac{|-32|}{|3(3n+1)|} < \frac{1}{30}.$$

Stąd

$$\frac{32}{3(3n+1)} < \frac{1}{30},$$

gdyż $3(3n+1) > 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Stąd

$$3n+1 > 320,$$

$$n > 106\frac{1}{3}.$$

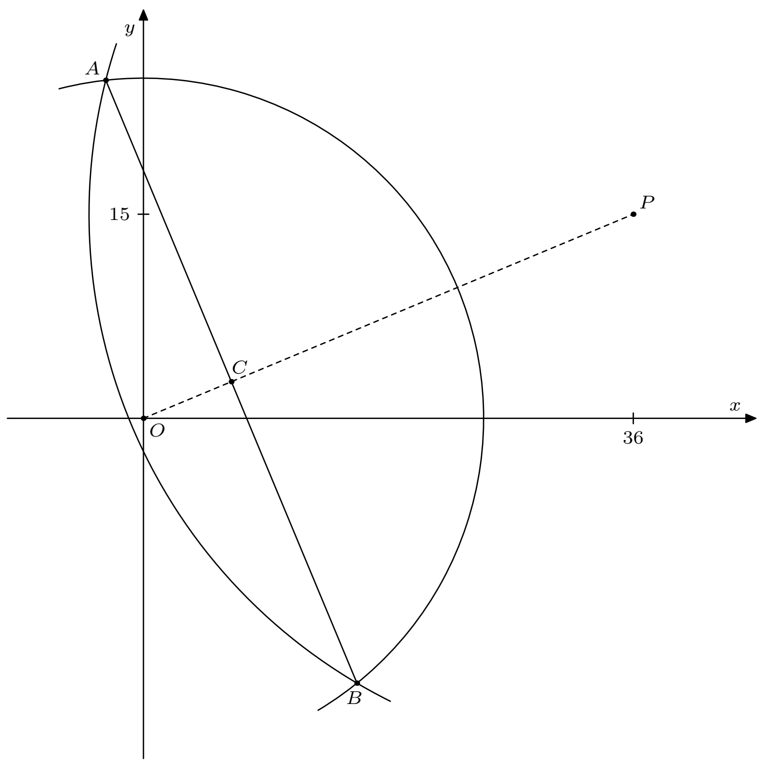
Zatem najmniejszą liczbą naturalną spełniającą podaną nierówność jest

$$n = 107.$$

Zadanie 13.

Okręgi o równaniach $x^2+y^2=625$ i $(x-36)^2+(y-15)^2=1600$ mają dwa punkty przecięcia: A i B. Oblicz długość odcinka AB.

I sposób rozwiązania



Oznaczmy:

- środek pierwszego okręgu symbolem O,
- środek drugiego okręgu symbolem P,
- punkty przecięcia okręgów symbolami A i B.

Niech C będzie punktem przecięcia odcinków AB i OP, $|AC|=h$, $|OC|=x$.

Zauważmy, że $|AB|=2h$ oraz $|OP|=39$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $h^2=25^2-x^2$ oraz $h^2=40^2-(39-x)^2$. Rozwiązujemy równanie $25^2-x^2=40^2-(39-x)^2$, otrzymując $x=7$. Zatem $h^2=25^2-7^2=576$, stąd $h=24$, czyli $|AB|=2h=48$.

II sposób rozwiązania (ze wzoru Herona)

Oznaczamy wszystko tak jak w sposobie I. Boki trójkąta oznaczamy tak jak na rysunku.

Obliczamy pole trójkąta OPA ze wzoru Herona. Wzór ten znajduje się w „Wybranych wzorach matematycznych" wydanych przez CKE.

Niech p oznacza połowę obwodu trójkąta OPA. Wtedy

$$p=52, \quad p-a=13, \quad p-b=27, \quad p-c=12 \quad \text{i} \quad h_1^2+\frac{1}{4}a^2=b^2.$$

Z drugiej strony $P_{OPA}=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot h$. Zatem $h=24$, czyli $|AB|=2h=48$.

Uwaga

Pole trójkąta OPA można obliczyć również z twierdzenia cosinusów:

$25^2+40^2-2\cdot 25\cdot 40\cos\alpha=39^2$, stąd $\cos\alpha=\frac{625+1600-1521}{2000}=\frac{704}{2000}=\frac{44}{125}$.

Zatem $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{44}{125}\right)^2}=\frac{117}{125}$. Obliczamy pole trójkąta OPA: $P_{OPA}=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 40\cdot\frac{117}{125}=468$.

III sposób rozwiązania (punkty przecięcia okręgu)

Rozwiązujemy układ równań, aby znaleźć punkty przecięcia dwóch okręgów:

$$\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ (x-36)^2+(y-15)^2=1600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=625 \\ x^2-72x+y^2-30y=79 \end{cases}$$

Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego otrzymujemy równanie:

$12x+5y=91$. Stąd $y=\frac{91-12x}{5}$ wstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie kwadratowe: $x^2+\left(\frac{91-12x}{5}-3\right)^2=625$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe: $169x^2-2184x-7344=0$, którego wyróżnik jest równy $\Delta=3120$ oraz $x_1=-\frac{36}{13}$, $x_2=\frac{204}{13}$. Obliczamy drugą współrzędną:

$$y_1=\frac{323}{13}, \qquad y_2=-\frac{253}{13}.$$

Mamy zatem 2 punkty przecięcia: $A=\left(-\frac{36}{13},\frac{323}{13}\right)$ oraz $B=\left(\frac{204}{13},-\frac{253}{13}\right)$.

Obliczamy odległość między nimi:

$$|AB|^2=\left(\frac{204}{13}+\frac{36}{13}\right)^2+\left(-\frac{253}{13}-\frac{323}{13}\right)^2=\left(\frac{240}{13}\right)^2+\left(\frac{576}{13}\right)^2=\frac{24^2\cdot 10^2}{13^2}+\frac{24^2\cdot 24^2}{13^2}=$$
$$=\frac{24^2}{13^2}\cdot\left(10^2+24^2\right)=\frac{24^2\cdot 26^2}{13^2}=24^2\cdot 2^2=48^2.$$

Zatem $|AB|=48$.

Zadanie 14.

Dany jest wykres funkcji kwadratowej $f(x)=x^2$ oraz punkt $A=(3,0)$. Znajdź punkt na wykresie funkcji f leżący najbliżej punktu A.

Rozwiązanie

Dowolny punkt leżący na wykresie funkcji f ma współrzędne: $\left(x,x^2\right)$. Obliczamy odległość takiego punktu od punktu A: $d=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2}$.

Weźmy funkcję

$$g(x)=(x-3)^2+\left(x^2-0\right)^2=x^4+x^2-6x+9,$$

gdzie x jest liczbą rzeczywistą.

Obliczamy pochodną tej funkcji i rozkładamy na czynniki:

$$g'(x)=4x^3+2x-6=2\left(2x^3+x-3\right)=2(x-1)\left(2x^2+2x+3\right).$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $2x^2+2x+3$:

$\Delta=4-4\cdot 2\cdot 3<0$, zatem $2x^2+2x+3>0$, więc jedynym miejscem zerowym funkcji $g'(x)$ jest $x=1$.

Zauważamy również, że:

- $g'(x)<0$ dla $x<1$,
- $g'(x)>0$ dla $x>1$,

A więc funkcja g ma minimum dla $x=1$.

Zatem punktem na wykresie funkcji f leżącym najbliżej punktu A jest punkt $(1,1)$.

Zadanie 15.

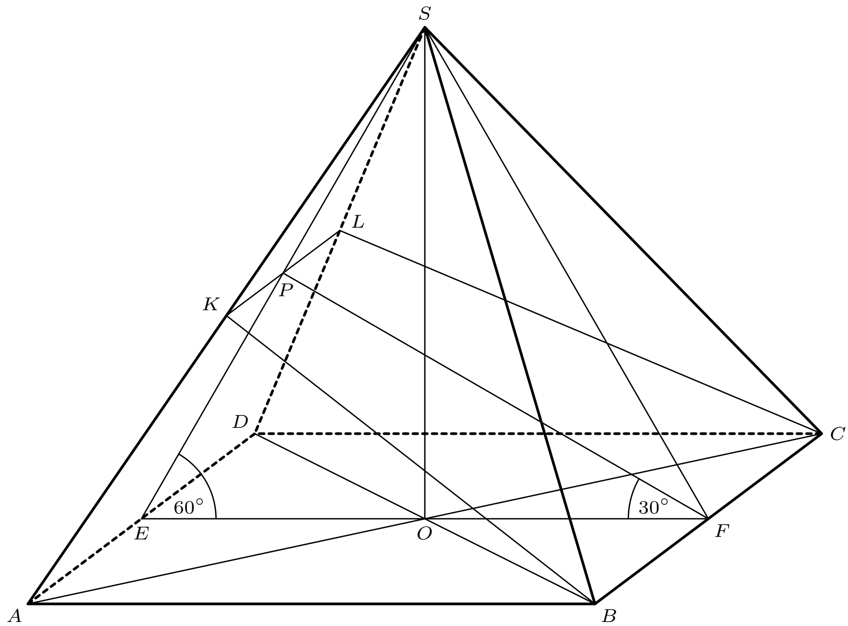
Wykaż, że funkcja $f(x)=x^3-12x$ w przedziale $(3,5)$ jest rosnąca.

Rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=3x^2-12$. Pochodna funkcji przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, w szczególności w przedziale $(3, 5)$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(3, 5)$.

Zadanie 16.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest równa 10 cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 60 stopni. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 30 stopni. Oblicz pole otrzymanego przekroju.



Przekrojem, którego pole należy obliczyć, jest trapez równoramienny $BCLK$.

Rozważmy przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i środki E, F krawędzi AD i BC. Ponieważ $\sphericalangle FES = 60^\circ$, więc trójkąt równoramienny FES jest trójkątem równobocznym o boku 10, stąd wysokość PF przekroju $BCLK$ (jako wysokość trójkąta FES) jest równa $5\sqrt{3}$. Punkt P jest spodkiem wysokości trójkąta równobocznego FES, czyli jest środkiem odcinka ES. Odcinek KL jest równoległy do AD, stąd K jest środkiem odcinka AS.

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta otrzymujemy: $KL = 5$. Pole przekroju jest zatem równe $P = \frac{1}{2}(10+5) \cdot 5\sqrt{3} = \frac{75}{2}\sqrt{3}$.

Zadanie 17.

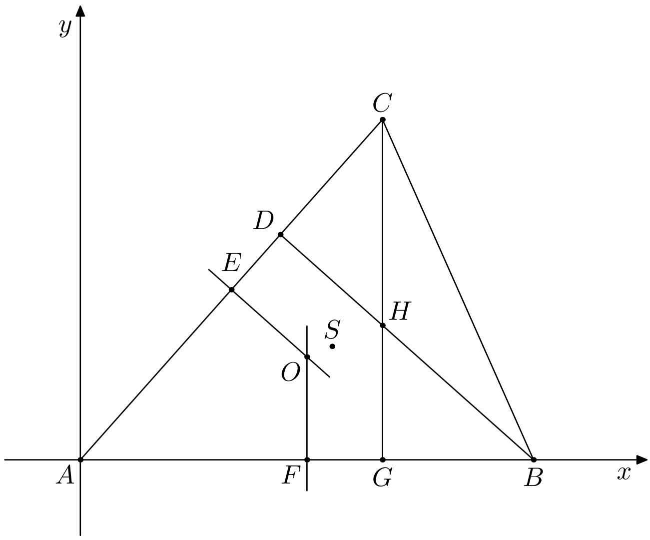
Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (0,0)$, $B = (6,0)$, $C = (6p, 6q)$, gdzie $p, q > 0$ oraz $p \neq \frac{1}{2}$.

Punkt H jest punktem przecięcia wysokości (ortocentrum) tego trójkąta.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Punkt S jest środkiem ciężkości tego trójkąta.

Wyznacz równanie prostej OH i wykaż, że punkt S leży na tej prostej.



Rozwiązanie

Oznaczmy, tak jak na rysunku:

- E — środek odcinka AC,
- F — środek odcinka AB,
- BD i CG — wysokości trójkąta ABC.

Zauważmy, że: $E=(3p,3q)$, $F=(3,0)$, $G=(6p,0)$.

Równanie prostej AC ma postać $y=ax$. Punkt C leży na tej prostej, więc $6q=a\cdot 6p$, zatem $a=\frac{q}{p}$. Stąd wynika, że prosta AC ma równanie: $y=\frac{q}{p}\cdot x$.

Równanie prostej EO ma postać: $y=-\frac{p}{q}\cdot x+c$ dla pewnego c. Punkt E leży na tej prostej, więc $3q=-\frac{p}{q}\cdot 3p+c$. Stąd $c=3q+\frac{3p^2}{q}=\frac{3\left(p^2+q^2\right)}{q}$.

Prosta EO ma zatem równanie: $y=-\frac{p}{q}\cdot x+\frac{3\left(p^2+q^2\right)}{q}$.

Prosta FO ma równanie: $x=3$. Stąd punkt O ma współrzędne: $O=\left(3,-\frac{3p}{q}+\frac{3\left(p^2+q^2\right)}{q}\right)$, czyli $O=\left(3,\frac{3\left(p^2+q^2-p\right)}{q}\right)$.

Równanie prostej BD ma postać $y=-\frac{p}{q}\cdot x+d$ dla pewnego d. Punkt B leży na prostej BD, więc $0=-\frac{p}{q}\cdot 6+d$, stąd $d=\frac{6p}{q}$. Prosta BD ma zatem równanie: $y=-\frac{p}{q}\cdot x+\frac{6p}{q}$.

Prosta CG ma równanie $x=6p$. Zatem punkt H ma współrzędne: $H=\left(6p,\frac{6\left(p-p^2\right)}{q}\right)$.

Wreszcie $S = \left(\frac{0+6+6p}{3}, \frac{0+0+6q}{3} \right)$, czyli $S = (2p+2, 2q)$.

Wyznaczamy równanie prostej OH.

Równanie to jest postaci: $y = ax + b$.

$O = \left(3, \frac{3(p^2+q^2-p)}{q} \right)$ oraz $H = \left(6p, \frac{6(p-p^2)}{q} \right)$ spełniają to równanie, zatem:

$\frac{3(p^2+q^2-p)}{q} = a \cdot 3 + b$ oraz $\frac{6(p-p^2)}{q} = a \cdot 6p + b$.

Rozwiązaniem tego układu równań jest:

$$a = \frac{3p-3p^2-q^2}{q(2p-1)},$$

$$b = \frac{6p(p^2+q^2-1)}{q(2p-1)}.$$

Zatem prosta OH ma równanie:

$$y = \frac{3p-3p^2-q^2}{q(2p-1)} \cdot x + \frac{6p(p^2+q^2-1)}{q(2p-1)}.$$

Sprawdzamy, że współrzędne punktu S spełniają to równanie, tzn. że zachodzi równość:

$$2q = \frac{3p-3p^2-q^2}{q(2p-1)} \cdot (2p+2) + \frac{6p(p^2+q^2-1)}{q(2p-1)}.$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy równość prawdziwą, co kończy dowód, że współrzędne punktu S spełniają równanie prostej OH.

Uwaga

Można pokazać, że $\overrightarrow{OH} = 3 \cdot \overrightarrow{OS}$, skąd wynika, że punkt S leży na prostej OH.

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{OS}$ oraz $\overrightarrow{OH}$:

$$\overrightarrow{OS} = \left[2p+2-3, 2q - \frac{3(p^2+q^2-p)}{q} \right] = \left[2p-1, \frac{3p-3p^2-q^2}{q} \right]$$

oraz

$$\overrightarrow{OH} = \left[6p-3, \frac{6(p-p^2)}{q} - \frac{3(p^2+q^2-p)}{q} \right] = \left[6p-3, \frac{9p-9p^2-3q^2}{q} \right] = 3 \cdot \overrightarrow{OS}.$$

Zatem punkt S leży na prostej OH.

Uwaga

W zadaniu 17 jest sformułowane następujące twierdzenie pochodzące od Eulera: w dowolnym trójkącie ortocentrum, środek ciężkości i środek okręgu opisanego są współliniowe.

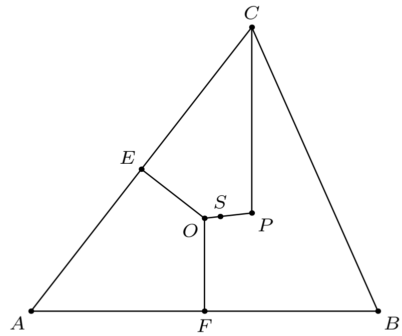
Prostą, na której leżą te trzy punkty nazywamy **prostą Eulera**.

Twierdzenie Eulera ma wiele dowodów bezpośrednich. Szczególnie piękny, choć trikowy, jest dowód następujący.

Dowód

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego, przez S środek ciężkości, zaś przez H punkt przecięcia wysokości danego trójkąta.

Poprowadźmy z punktu O przez punkt S odcinek OP tak, by $OP = 3 \cdot OS$.



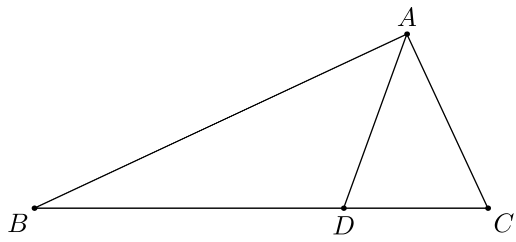
Niech F będzie środkiem boku AB, a E środkiem boku AC. Wówczas $\frac{CS}{SF} = 2 = \frac{PS}{SO}$, zatem z twierdzenia Talesa wynika, że $CP \parallel OF$. Ponieważ $OF \perp AB$, mamy także $CP \perp AB$. Zatem punkt P leży na wysokości trójkąta opuszczonej na prostą AB. Ponieważ punkt P został określony niezależnie od wyboru boku, P leży na wszystkich wysokościach tego trójkąta i $P = H$. Ponadto z konstrukcji mamy $OS = 2 \cdot SH$.

W powyższym dowodzie warto zwrócić uwagę na to, że nie dowodzimy bezpośrednio współliniowości rozważanych trzech punktów, ale „przedefiniowujemy” jeden z tych punktów. Definiujemy mianowicie nowy punkt P w taki sposób, by zagwarantować współliniowość, a następnie dowodzimy, że ten nowy punkt P jest punktem przecięcia wysokości (ortocentrum) trójkąta ABC. Jest to piękny pomysł, ale trudno oczekiwać od ucznia, że łatwo przyjdzie mu on do głowy.

Dla kontrastu, dowód twierdzenia Eulera przedstawiony w rozwiązaniu zadania 17 jest rutynowy i właściwie nie wymaga żadnego poważniejszego pomysłu. Ceną za tę rutynowość jest oczywiście długość dowodu, wymagającego długich obliczeń. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że elegancja i piękno w matematyce nie wykluczają metod rutynowych, długich, ale skutecznych.

Zadanie 18.

ABC jest równe $P = \frac{1}{4}\left(d^2 + d\sqrt{d^2 + 2a^2}\right)$. Dany jest trójkąt prostokątny ABC z kątem prostym przy wierzchołku A. Przeciwprostokątna BC ma długość a, dwusieczna AD kąta prostego ma długość d. Udowodnij, że pole trójkąta ABC jest równe $P = \frac{1}{4}\left(d^2 + d\sqrt{d^2 + 2a^2}\right)$.



Rozwiązanie

Oznaczmy, tak jak na rysunku: $|AB| = c$, $|AC| = b$.

Pole trójkąta ABC jest równe: $P = \frac{bc}{2}$, skąd $bc = 2P$.

Obliczamy inaczej pole trójkąta ABC:

$$P = \frac{cd\sin 45^\circ}{2} + \frac{bd\sin 45^\circ}{2} = \frac{cd\sqrt{2}}{4} + \frac{bd\sqrt{2}}{4} = (b+c)\cdot\frac{d\sqrt{2}}{4}.$$

Chcemy obliczyć $b+c$. Zauważamy, że $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$.

Z twierdzenia Pitagorasa: $b^2 + c^2 = a^2$, więc$(b+c)^2 = a^2 + 2bc$. Zatem $(b+c)^2 = a^2 + 4P$, czyli

$$b + c = \sqrt{a^2 + 4P}.$$

Wobec tego

$$P = (b+c)\cdot\frac{d\sqrt{2}}{4} = \sqrt{a^2+4P}\cdot\frac{d\sqrt{2}}{4},$$

czyli

$$P = \sqrt{a^2+4P}\cdot\frac{d\sqrt{2}}{4}.$$

Chcemy z tego równania wyznaczyć P.

Otrzymujemy kolejno:

$$P^2 = \left(a^2 + 4P\right)\cdot\frac{d^2}{8},$$

$$8P^2 - 4d^2P - a^2d^2 = 0.$$

Rozwiązujemy to równanie kwadratowe: $\Delta = 16d^2\left(d^2 + 2a^2\right)$, $P = \frac{d^2 + d\sqrt{d^2+2a^2}}{4}$ (drugie rozwiązanie odrzucamy, gdyż jest ujemne).

To kończy dowód.

Zadanie 19.

Udowodnij, że jeśli $a > 0$, to dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełnia równanie

$$x^3 + ax^2 + a(a+1)x - (a+1)^2 = 0.$$

I sposób rozwiązania

Zauważamy, że 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc równanie możemy zapisać w postaci:

$$(x-1)\left(x^2+(a+1)x+(a+1)^2\right)=0.$$

Stąd $x=1$ lub $x^2+(a+1)x+(a+1)^2=0$.

Równanie $x^2+(a+1)x+(a+1)^2=0$ nie ma rozwiązania, gdyż $\Delta=-3(a+1)^2<0$.

Zatem jedyną liczbą x, która spełnia równanie $x^3+ax^2+a(a+1)x-(a+1)^2=0$, jest $x=1$.

II sposób rozwiązania

Niech

$$f(x)=x^3+ax^2+a(a+1)x-(a+1)^2.$$

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=3x^2+2ax+a(a+1).$$

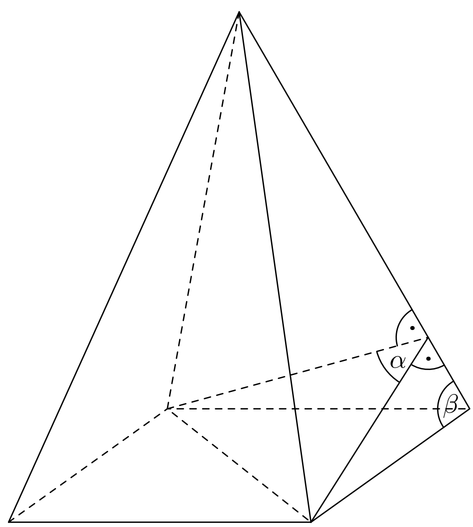
Obliczamy wyróżnik tej funkcji kwadratowej:

$$\Delta=-4a(2a+3).$$

Ponieważ z założenia $a>0$, więc $\Delta<0$. Zatem dla każdego $a>0$ pochodna $f'(x)>0$, czyli funkcja f jest rosnąca, a więc ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Ponieważ $f(1)=0$, więc f ma dokładnie jedno miejsce zerowe. To kończy dowód.

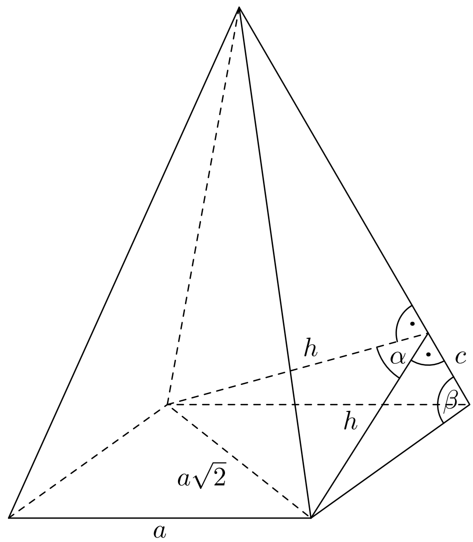
Zadanie 20.

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem dwuściennym między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa) — zob. rysunek. Wykaż, że $\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\beta=-1$.



Rozwiązanie

Oznaczmy, tak jak na rysunku: a — krawędź podstawy, h — wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, c — odcinek łączący wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości h.



Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos\alpha.$$

Stąd

$$h^2 \cos\alpha = h^2 - a^2.$$

Na podstawie tw. Pitagorasa mamy:

$$h^2 + c^2 = a^2.$$

Zatem

$$h^2 \cos\alpha = -c^2.$$

Stąd

$$\frac{h^2}{c^2} \cdot \cos\alpha = -1,$$

czyli

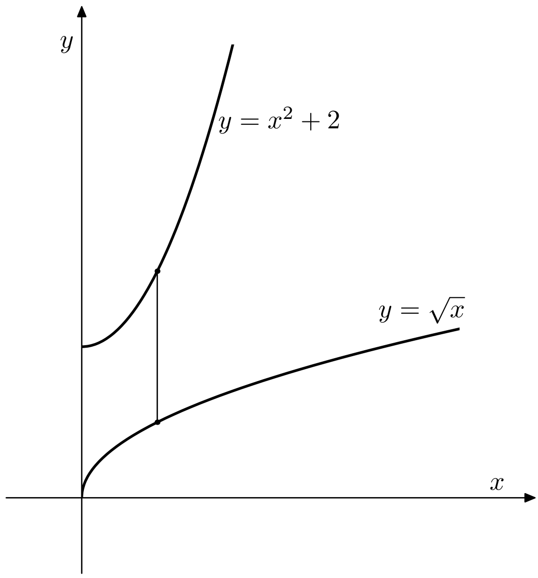
$$\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\beta = -1.$$

To kończy dowód.

Zadanie 21.

Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi Oy, których jeden koniec leży na wykresie funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + 2$, a drugi koniec leży na wykresie funkcji g określonej wzorem $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$.

Oblicz długość najkrótszego takiego odcinka.



Rozwiązanie

Niech $A=\left(x,x^2+2\right)$, $B=\left(x,\sqrt{x}\right)$ dla pewnego $x\geqslant 0$. Wówczas długość odcinka AB jest równa $x^2+2-\sqrt{x}$.

Rozważmy funkcję $h(t)=t^4-t+2$. Wówczas długość odcinka AB jest równa $h\left(\sqrt{x}\right)$.

Wyznaczymy minimum funkcji h w przedziale $\langle 0,+\infty)$.

Obliczamy pochodną funkcji h: $h'(t)=4t^3-1$.

Jeśli $0<t<\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, to $h'(t)<0$,

jeśli $t>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, to $h'(t)>0$.

Zatem w przedziale $\left\langle 0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\rangle$ funkcja h jest malejąca i w przedziale $\left\langle \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},+\infty\right)$ funkcja h jest rosnąca. Stąd wynika, że h przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Ta najmniejsza wartość jest długością szukanego najkrótszego odcinka:

$$h\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+2=2-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Odp.: $|AB|=2-\dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

Zadanie 22.

Dana jest funkcja $f(x)=x^2$ określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x oraz punkt $P=(p,p^2)$ leżący na wykresie funkcji f. Wyznacz a i b tak, by prosta o równaniu $y=ax+b$ była styczna do wykresu funkcji f w punkcie P. Wykaż, że dla każdego x zachodzi nierówność $x^2\geqslant ax+b$.

Rozwiązanie

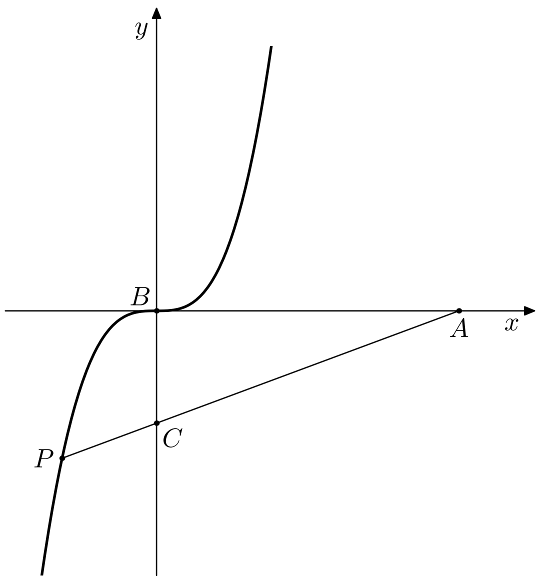
Pochodna funkcji f jest określona wzorem $f'(x)=2x$. Stąd wynika, że współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie P jest równy $a=2p$. Prosta o równaniu $y=2px+b$ przechodzi przez punkt P, więc $p^2=2p\cdot p+b$. Zatem $b=-p^2$, czyli równanie stycznej ma postać $y=2px-p^2$. Nierówność $x^2\geqslant 2px-p^2$ jest równoważna nierówności $x^2-2px+p^2\geqslant 0$, czyli nierówności $(x-p)^2\geqslant 0$, a więc jest prawdziwa dla każdego x.

Zadanie 23.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=x^3$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Wyznacz punkt $P=\left(p,p^3\right)$ leżący na wykresie funkcji f najbliżej punktu $A=(4,0)$.

Rozwiązanie

Wystarczy rozpatrywać punkty $P=\left(p,p^3\right)$ dla $p\geqslant 0$, gdyż dla $p<0$ punkt o współrzędnych $(0,0)$ leży bliżej punktu A niż punkt P:



$$AP>AC>AB.$$

Odległość AP dla $p\geqslant 0$ jest równa $AP=\sqrt{(p-4)^2+(p^3)^2}$.

Mamy zatem znaleźć $p\geqslant 0$, dla którego wielomian $W(p)=p^6+(p-4)^2=p^6+p^2-8p+16$ przyjmuje najmniejszą wartość. Rozważamy zatem pochodną wielomianu W:

$$W'(x)=6x^5+2x-8=2(x-1)\left(3x^4+3x^3+3x^2+3x+4\right).$$

Ponieważ dla $x\geqslant 0$

$$3x^4+3x^3+3x^2+3x+4>0,$$

więc:

- $W'(x) < 0$ dla $x \in (0,1)$,
- $W'(x) > 0$ dla $x \in (1,+\infty)$.

Stąd wynika, że:

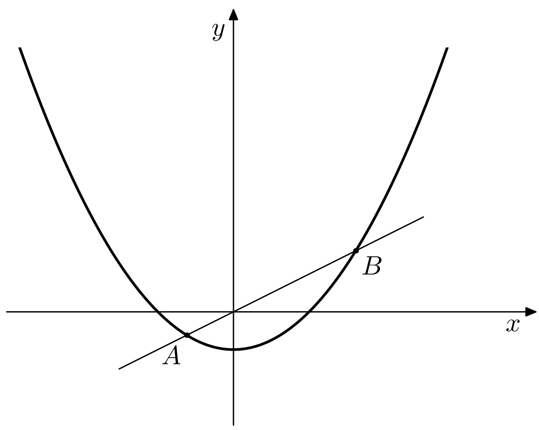
- wielomian $W(x)$ jest funkcją malejącą w przedziale $\langle 0,1\rangle$,
- wielomian $W(x)$ jest funkcją rosnącą w przedziale $\langle 1,+\infty)$.

Zatem szukaną wartością p, dla której wartość wielomianu $W(p)$ jest najmniejsza, jest $p=1$. Szukanym punktem P jest zatem $P=(1,1)$.

Zadanie 24.

Prosta o równaniu $y=kx$ przecina parabolę o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ w dwóch punktach A i B. Udowodnij, że styczne do tej paraboli w punktach A i B są prostopadłe.

Rozwiązanie



Najpierw wyznaczamy współrzędne punktów A i B. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y=kx \\ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x^2-kx-\frac{1}{2}=0,$$

$$\Delta=k^2+1,$$

$$x_1=\frac{k-\sqrt{k^2+1}}{2\cdot\frac{1}{2}}=k-\sqrt{k^2+1}, \qquad x_2=k+\sqrt{k^2+1}.$$

Stąd $A=\left(k-\sqrt{k^2+1}, k^2-k\sqrt{k^2+1}\right)$, $B=\left(k+\sqrt{k^2+1}, k^2+k\sqrt{k^2+1}\right)$.

Wyznaczamy teraz współczynniki kierunkowe stycznych. Niech $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$. Wówczas mamy równania stycznych $y=a_Ax+b_A$ oraz $y=a_Bx+b_B$, gdzie $a_A=f'\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)$ oraz $a_B=f'\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)$. Ponieważ $f'(x)=x$, więc $a_A=k-\sqrt{k^2+1}$, $a_B=k+\sqrt{k^2+1}$. Stąd $a_A\cdot a_B=\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)\cdot\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)=k^2-\left(k^2+1\right)=-1$, czyli styczne są prostopadłe.

Dodatek B

Zestaw zadań II

Elżbieta Dittmajer
Marian Pacholak
Maria Pająk-Majewska
Agata Siwik

B.1. Szereg geometryczny

Zadanie 1.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny taki, że pierwszy wyraz jest równy $\frac{3}{4}$, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{9}{4}$. Oblicz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez q iloraz ciągu (a_n). Korzystając ze wzoru na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zapisujemy: $S = \frac{9}{4} = \frac{\frac{3}{4}}{1-q}$, czyli $q = \frac{2}{3}$.

Ponieważ dla $q = \frac{2}{3}$ mamy $0 < q < 1$, liczba $\frac{2}{3}$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 2.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich taki, że pierwszy wyraz jest równy $\frac{3}{4}$, a trzeci wyraz a_3 jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz i trzeci wyraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

Ponieważ, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, stąd $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4}{9}$. Zatem $q = -\frac{2}{3}$ lub $q = \frac{2}{3}$.

Uwzględniając warunki zadania mamy $q = \frac{2}{3}$.

Ponieważ wszystkie wyrazy naszego ciągu są dodatnie oraz $|q| = \left|\frac{2}{3}\right| < 1$, zatem

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{4}.$$

Odpowiedź: Suma S wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich jest równa: $S = \frac{9}{4}$.

B.2. Granice ciągów

Zadanie 3.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^7 - 2n^3 + 3n}{1 + 4n^3 + 5n^4 + 6n^7}$. Zapisz pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^7 - 2n^3 + 3n}{1 + 4n^3 + 5n^4 + 6n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7\left(1 - \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^6}\right)}{n^7\left(\frac{1}{n^7} + \frac{4}{n^4} + \frac{5}{n^3} + 6\right)} = \frac{1}{6} = 0{,}166\ldots$$

Zapisujemy cyfry: 1, 6, 6.

Zadanie 4.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^8 - 2n^3 + 3n}{12 + 5n^4 + 6n^5}$ jest równa

A. $-\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Odpowiedź: D.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8 - 2n^3 + 3n}{12 + 5n^4 + 6n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^8\left(1 - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7}\right)}{n^5\left(\frac{12}{n^5} + \frac{5}{n} + 6\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7}\right)}{\left(\frac{12}{n^5} + \frac{5}{n} + 6\right)} = +\infty.$$

Zadanie 5.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^3 + 3n}{1 + 2n + 3n^2 + 4n^5}$ jest równa

A. $-\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Odpowiedź: C.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(\frac{-2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}{n^5\left(\frac{1}{n^5}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^3}+4\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-2}{n^2}+\frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^5}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^3}+4)}=\frac{0}{4}=0.$$

Zadanie 6.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}$. Zapisz pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n}-4\right)^3}=\frac{1}{32}=0{,}03125.$$

Nie rozwijamy wzoru $(1-4n)^3$, tylko wyłączamy przed nawias n z każdego z trzech czynników.

Zapisujemy cyfry: 0, 3, 1.

Zadanie 7.

Ciągi (a_n), (b_n) określone są następująco: $a_n=n^4+5$ oraz $b_n=\dfrac{7n^5+29n-7}{7n}$, dla $n\geqslant 1$. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$. Zapisz pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4+5-\frac{7n^5+29n-7}{7n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5+35n-7n^5-29n+7}{7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+7}{7n}=\frac{6}{7}=0{,}85714\ldots$$

Zapisujemy cyfry: 8, 5, 7.

Zadanie 8.

Ciągi (a_n), (b_n) określone są następująco: $a_n=\dfrac{4}{n^2}$ oraz $b_n=\dfrac{n^3+2}{7(n+1)}$, dla $n\geqslant 1$. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)$. Zapisz pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n^3+2}{7(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{7n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{4}{7}=0{,}(571428).$$

Zapisujemy cyfry: 5, 7, 1.

Zadanie 9.

Ciągi (a_n), (b_n) określone są następująco: $a_n = \frac{3}{n}$ oraz $b_n = \frac{n^3+2}{n+1}$, dla $n \geqslant 1$.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ jest równa

A. $-\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Odpowiedź: D.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\cdot\frac{n^3+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = +\infty.$$

Zadanie 10.

Ciągi (a_n), (b_n) określone są następująco: $a_n = \frac{3}{n^{13}}$ oraz $b_n = \frac{n^3+2}{n+1}$, dla $n \geqslant 1$.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ jest równa

A. $-\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Odpowiedź: C.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^{13}}\cdot\frac{n^3+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{n^{14}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{n^{11}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0.$$

Zadanie 11.

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{3n^3}{(n+2)(3n+7)}\right)$. Zapisz cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{3n^3}{(n+2)(3n+7)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+7n^2-3n^3}{(n+2)(3n+7)} = \lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{(n+2)(3n+7)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{3n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{7}{3n}\right)} = \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$$

Zapisujemy cyfry: 2, 3, 3.

B.3. Granica ciągu (z parametrem)

Zadanie 12.

Dla liczby p różnej od zera określamy ciąg $a_n = \dfrac{(9p-1)n^2 - 4pn + 3p}{1+pn^2}$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz, dla jakiej wartości p granica ciągu (a_n) jest równa 2. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Wyznaczamy granicę ciągu (a_n) w zależności od p:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(9p-1)n^2-4pn+3p}{1+pn^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(9p-1-\frac{4p}{n}+\frac{3p}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+p\right)} = \frac{9p-1}{p}.$$

Zapisujemy równanie: $\dfrac{9p-1}{p} = 2$. Rozwiązaniem równania jest $p = \dfrac{1}{7} = 0{,}(142857)$.

Zapisujemy cyfry: 1, 4, 2.

B.4. Granice funkcji

Zadanie 13.

Granica $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-x^2}{x+3}$ jest równa

A. $-\infty$. B. $-\dfrac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Odpowiedź: B.

Rozwiązanie

Obliczamy: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-x^2}{x+3} = \dfrac{6-3^2}{3+3} = -\dfrac{1}{2}$.

Zadanie 14.

Granica $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-5x}{x+3}$ jest równa

A. $-\infty$. B. 0. C. 6. D. $+\infty$.

Odpowiedź: A.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę: $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-5x}{x+3} = -\infty$.

Zadanie 15.

Granica $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ jest równa

A. $-\infty$. B. 0. C. 2. D. $+\infty$.

Odpowiedź: C.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$.

Zadanie 16.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \dfrac{2x^4+13}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -\sqrt{6}$ i $x \neq \sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$.

Zakoduj cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy:

$$f'(x) = \frac{\left(2x^4+13\right)'\left(6-x^2\right) - \left(2x^4+13\right)\left(6-x^2\right)'}{\left(6-x^2\right)^2} = \\ = \frac{8x^3\left(6-x^2\right) + 2x\left(2x^4+13\right)}{\left(6-x^2\right)^2}.$$

Zatem $f'(1) = \dfrac{8(6-1)+2(2+13)}{(6-1)^2} = \dfrac{8\cdot 5 + 2\cdot 15}{25} = \dfrac{14}{5} = 2{,}8$.

Zapisujemy cyfry: 2, 8, 0.

Zadanie 17.

Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x - y + 9 = 0$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$.

Rozwiązanie

Zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej $y = 10x + 9$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 12x^2 - 2$.

Zauważamy, że dla $x=-1$ pochodna funkcji f jest równa 10 i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej l. Dla $x=1$ mamy $f'(1)=10$, ale $f(1)=3$. Punkt $(1,3)$ nie jest punktem wspólnym wykresu funkcji f i prostej l, zatem prosta l nie jest styczna do wykresu funkcji f w tym punkcie.

Obliczamy wartość funkcji f w punkcie $x=-1$: $f(-1)=-1$.

Punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ należy również do prostej l, więc dana prosta $y+1=10(x+1)$, czyli $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f, co kończy dowód.

Zadanie 18.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=-5x^2+3x+8$, prostopadłej do prostej o równaniu $x-17y+17=0$.

I sposób rozwiązania

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y=\frac{1}{17}x+1$ ma postać $y=-17x+b$.

Szukamy punktu, w którym pochodna funkcji f jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej. Obliczamy pochodną funkcji f

$$f'(x)=-10x+3.$$

Następnie rozwiązujemy równanie

$$f'(x)=-17,$$

$$-10x+3=-17,$$

$$x=2.$$

Obliczamy wartość funkcji w punkcie $x=2$: $f(2)=-6$.

Zatem punkt $P=(2,-6)$ jest punktem styczności.

Wyznaczamy równanie stycznej $-6=-17\cdot 2+b$, stąd $b=28$.

Równanie stycznej ma postać $y=-17x+28$.

II sposób rozwiązania

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y=\frac{1}{17}x+1$ ma postać $y=-17x+b$. Ta prosta nie jest równoległa do osi paraboli, a więc jest styczna do paraboli wtedy i tylko wtedy, gdy ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny. Należy wyznaczyć współczynnik b tak, aby równanie $-5x^2+3x+8=-17x+b$ miało jedno rozwiązanie. Zatem wyróżnik równania musi być równy zero, więc $560-20b=0$, a stąd $b=28$.

Równanie stycznej ma postać $y=-17x+28$.

Zadanie 19.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=-5x^2+3x+8$, równoległej do prostej o równaniu $y=-17x+9$.

I sposób rozwiązania

Prosta równoległa do prostej o równaniu $y=-17x+9$ ma postać $y=-17x+b$.

Szukamy punktu, w którym pochodna funkcji f jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej. Obliczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = -10x + 3$.

Następnie rozwiązujemy równanie :

$$f'(x) = -17,$$

$$-10x + 3 = -17,$$

$$x = 2.$$

Obliczamy wartość funkcji w punkcie $x = 2$: $f(2) = -6$.

Zatem punkt $P = (2, -6)$ jest punktem styczności.

Wyznaczamy równanie stycznej $-6 = -17 \cdot 2 + b$, stąd $b = 28$. Równanie stycznej ma postać $y = -17x + 28$.

II sposób rozwiązania

Prosta równoległa do prostej o równaniu $y = -17x + 9$ ma postać $y = -17x + b$. Ta prosta nie jest równoległa do osi paraboli, a więc jest styczna do paraboli wtedy i tylko wtedy, gdy ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny. Należy wyznaczyć współczynnik b tak, aby równanie $-5x^2 + 3x + 8 = -17x + b$ miało jedno rozwiązanie. Zatem wyróżnik równania musi być równy zero, więc $560 - 20b = 0$, a stąd $b = 28$. Równanie stycznej ma postać $y = -17x + 28$.