

Funkcje potęgowe, wykładnicze i logarytmiczne

Zadanie 1

Oblicz:

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16}$

b) $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{64}}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-27}{343}}$

d) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{-8}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

f) $\sqrt[5]{(-2)^{10}}$

Zadanie 2

Oblicz:

a) $0,8^{-2} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1,5)^{-3}$

b) $2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{5^{-1-5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - (3^{-1} + 3^{-2})^{-\frac{1}{2}} + \left(9^{\frac{1}{2}} - 3^{-1}\right)^{-1}$

Zadanie 3

Oblicz 210% wartości wyrażenia:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^0 - 3\frac{1}{3} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-2} + 2^{-3} \cdot 16^{0,25}.$$

Zadanie 4

Wyznacz liczbę, której 80% jest równe wartości wyrażenia:

$$\left[(7 + 2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}} + (7 - 2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Zadanie 5

Uzasadnij równości:

a) $\frac{1}{3-2\sqrt{2}} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 6$

b) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{\frac{6}{22+12\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2} - 2$

d) $4 + \sqrt{5} = \sqrt{21 + 8\sqrt{5}}$

Zadanie 6

Zapisz w postaci potęgi o podstawie 2:

a) $\sqrt{2} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \cdot (2^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1} \cdot [(\sqrt{2})^{\sqrt{3}+1}]^{\sqrt{3}-1}$

b) $\frac{1}{8} \cdot (4^{1-\sqrt{5}})^{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{32}} \cdot \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{16}}$

Zadanie 7Wykaż, że wyrażenia $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$ i $(5\sqrt{2} - 7)^2$ są równe.**Zadanie 8**

Oblicz:

a) $\log_2 \frac{1}{64}$

b) $\log_{36} 6$

a) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

d) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{5}{3}$

e) $\log_{\frac{3}{5}} 1$

f) $\log_{\frac{3}{5}} 2\frac{7}{9}$

g) $\log_{\frac{1}{2}} 4\sqrt{2}$

h) $\log_{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$

i) $\log_{\sqrt{2}} 8\sqrt{2}$

Zadanie 9Oblicz x , gdy:

a) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

b) $\log_{\frac{3}{4}} x = 3$

c) $\log_{1\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2}$

d) $\log_{\frac{4}{3}} x = -3$

e) $\log_x 0,125 = -3$

f) $\log_x 2,25 = -2$

g) $\log_x 8 = -1\frac{1}{2}$

h) $\log_x \sqrt{8} = -3$

i) $\log_x \sqrt{8} = -\frac{2}{3}$

Zadanie 10

Oblicz:

a) $\log_7 7^3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 2^5$

c) $\log_9 \log_3 27$

d) $\log_8 \log_4 \log_2 16$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5} 8}$

f) $3^{\log_3 4 + \log_{\frac{1}{3}} 5}$

Zadanie 11

Oblicz:

a) $2 \log_4 24 - 2 \log_4 3$

b) $2 \log_{\frac{1}{3}} 9 - \log_{\frac{1}{3}} 3$

c) $10^{3 + \log 5}$

d) $4^{\log_2 3 + 3 \log_{16} 2}$

Zadanie 12

Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{\log_2 8 - \log_4 2 + 3 \log_5 1}{\log_8 4}$

b) $5^{2 \log_5 3 - \log_{25} 9} + \log_{0,2} 27$

Zadanie 13

Porównaj liczby:

a) $2^{\frac{3}{4}}$ i $2^{\frac{3}{2}}$

b) $1^{\frac{3}{4}}$ i $1^{\frac{3}{2}}$

c) $0^{\frac{3}{4}}$ i $0^{\frac{3}{2}}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ i $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$ i $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{1,5}$ i $\left(\frac{4}{5}\right)^{1,4}$

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2,2}$ i $\left(\frac{5}{3}\right)^{2,1}$

h) $\frac{\pi}{4}$ i $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-1}$

Zadanie 14

Sporządź wykres funkcji:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y = 2^{-x}$

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

e) $y = -2^x$

f) $y = -2^{-x}$

g) $y = 2^{x+3}$

h) $y = 2^x - 3$

i) $y = 3 - 2^x$

Zadanie 15

Porównaj liczby:

a) $\log_3 10$ i $\log_3 28$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 10$ i $\log_{\frac{1}{3}} 28$

c) $\log_2 \sqrt{2}$ i $\log_2 1,4$

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9}$ i $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 0,5$ i $\log_{\frac{1}{3}} 0,5$

f) $\log_3 5$ i $\log_5 3$

Zadanie 16

Sporządź wykres funkcji:

a) $y = \log_2 x + 3$

b) $y = \log_2 (x + 2)$

c) $y = \log_2 (x + 2) + 3$

d) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$

e) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + 4)$

f) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + 4) - 2$

Zadanie 17

Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log_4 (-3x)$

b) $f(x) = \log (x^2 - 4)$

c) $f(x) = \log_{0,5} (x^2 - 3x)$

d) $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} (x^2 + x - 42)$

e) $f(x) = \log_8 \frac{2-x}{x+2}$

f) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} \frac{-x^2+11x-10}{x-4}$

Zadanie 18Wyznacz x :

a) $\log_2 x = -3$

b) $\log_3 (8 - x) = 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (4x - 3) = -2$

d) $\log_3 (x^2 + 2) = 3$

e) $\log_{\frac{2}{3}} (3 - x^2) = -1$

f) $\log_{0,6} \frac{2x-1}{x-1} = -1$

Zadanie 19Do wykresu pewnej funkcji wykładniczej należy punkt $P = (-3, 3\frac{3}{8})$.

a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Rozwiąż równanie: $f(x) = \frac{16}{81}$.

c) Rozwiąż nierówność: $f(x) < 1\frac{1}{2}$.

Zadanie 20

Rozwiąż równania:

a) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \dots \cdot 2^{2x} = \left(\frac{1}{32}\right)^{-x-1}$

b) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots = 2\sqrt{3 \cdot 2^x + 4}$

Zadanie 21Dla jakich wartości parametru p funkcja

$f(x) = (p^2 - 4p + 3)^x$ jest funkcją wykładniczą rosnącą?

Zadanie 22

Znajdź $A \cap B$, jeżeli:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{5x} < 8 \cdot 4^{3-2x}\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 2^x - 4 \cdot 2^{-x} > 3\}.$$

Zadanie 23

Dla jakich wartości parametru a dziedziną funkcji $f(x) = \log(x^2 + 2x + a)$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

Zadanie 24

Wyznacz punkty przecięcia wykresów funkcji

$$y = \log_4 x \text{ i } y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Zadanie 25

Rozwiąż graficznie równanie: $\log_2(x + 2) = 2^{x-1}$.

Zadanie 26

Dla jakich m funkcja $f(x) = \log_{(3m-2)}x$ jest funkcją rosnącą?

Zadanie 27

W zależności od parametru m podaj liczbę rozwiązań równania $\log_4(2^x - m) = x$.

Zadanie 28

Dla jakich wartości parametru m równanie $\log_5 m x = 2 \log_5(x + 3)$ nie ma rozwiązania?

Zadanie 29

Wyznacz zbiory $A \cup B$ oraz $A \cap B$, jeżeli:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 5^x + 5^{3-x} < 30\}$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge \log(3x + 4) + \log(x + 8) \geq 2\}.$$

Zadanie 30

Zbiór A jest dziedziną funkcji

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 5}{2 - x}} + \log(x + 1), \text{ a zbiór } B \text{ jest}$$

zbiorem rozwiązań nierówności

$$2 \log(2^x - 2) \leq \log(2^x + 10) + \log 2. \text{ Wyznacz } B \setminus A.$$