

1. (R) Sporządź wykres funkcji:
  - a)  $f(x) = -|x + 4|^{\frac{1}{2}} + 2$
  - b)  $f(x) = -(x + 3)^{-1} - 2$
  - c)  $f(x) = (x - 2)^3 - 4$
2. (R) Wykonaj działania:
  - a)  $(4x^{-1} + 3x)(4x - 3x^{-1})$
  - b)  $(108^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{1}{3}})2^{\frac{1}{3}}$
  - c)  $(\sqrt[3]{5} - 1)^3$
  - d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$
  - e)  $\frac{4\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}\right)^5$
  - f)  $3 \cdot \frac{2^{2000} + 2^{2001}}{10^{1999}} \cdot 5^{2000}$
  - g)  $\frac{3^7 + 3^6}{3^6 + 3^5}$
3. (R) Przedstaw w postaci potęgi:
  - a)  $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^5} (x\sqrt{x})^3$
  - b)  $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$
  - c)  $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}$
4. (R) Sprawdź, czy ciąg:
  - a)  $(\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2, \sqrt{5} - 2, \sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$  jest ciągiem arytmetycznym,
  - b)  $(\sqrt{5} - 2, \frac{1}{\sqrt{5}-2}, 17\sqrt{5} + 38)$  jest ciągiem geometrycznym,
  - c)  $(16, 2^{x-1}, 4^{x-3})$  jest ciągiem geometrycznym.
5. (R) Rozwiąż równanie:
  - a)  $g(f(x)) = f(x)$ , gdzie  $f(x) = x - 2$ ,  $g(x) = \sqrt{x + 2}$ .
  - b)  $3\sqrt{x} - 2 = x$
  - c)  $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = 2$
  - d)  $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$
  - e)  $x^{-1,5} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
6. (R) Rozwiąż nierówność:  $x^{\frac{1}{3}} + x^2 \leq 2$ .
7. (R) Dane są funkcje:  $f(x) = \sqrt{9 - 8x - x^2}$  oraz  $g(x) = 3x - 3$ .
  - a) Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ .
  - b) Rozwiąż równanie  $f(x) = g(x)$ .
  - c) Rozwiąż nierówność  $g(x) \cdot f(x) \geq 0$ .
8. (R) Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f$  i  $g$  opisane wzorami:  $f(x) = 2^{x-1}$  i  $g(x) = |2x + 1|$  oraz na podstawie ich wykresów odczytaj liczbę rozwiązań równania  $f(x) = g(x)$ .
9. (R) Wykonaj wykres funkcji  $f(x) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$  i podaj miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji.
10. (R) Wyznacz liczbę naturalną  $n$  tak, aby liczba:
  - a)  $2^n$  była większa od  $16^{10}$ , ale mniejsza od  $8^{14}$ ,
  - b)  $3^n$  była niewiększa od  $750$  i niemniejsza niż  $81$ .
11. (R) Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym; pierwsze z prędkością  $v_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2t-1} \frac{cm}{s}$ , a drugie z prędkością  $v_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4-t} \frac{cm}{s}$ , gdzie  $t$  oznacza czas liczony w sekundach od początku obserwacji tych ciał. Kiedy stosunek  $v_1$  do  $v_2$  jest mniejszy od  $\frac{32}{243}$ ?
12. (R) Rozwiąż równanie:
  - a)  $4^x - 8 \cdot 2^x = 0$
  - b)  $5^{x-1} - 5 \cdot 2^x = 5^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-2}$
  - c)  $7^{x-2} \cdot 16^x = 2^{3x+2}$

- d)  $3^{x+2} - 3^x = 72$   
 e)  $5^x + 5^{3-x} = 30$   
 f)  $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$
13. (R) Rozwiąż nierówność:  
 a)  $25 \cdot (0,2)^{x^2} < 5^x$   
 b)  $1 < 2^{x^2} \leq 2^x$   
 c)  $16^x - 4^x \leq 0$   
 d)  $4^x + 2^{x+1} \leq 15$   
 e)  $6^x \leq 11^x$   
 f)  $2^{x+2} - 2^x < 48$
14. (R) a) Dla jakich wartości  $x$  określone jest wyrażenie:  $\sqrt{6^x + 6^{2-x} - 37}$ ?  
 b) Dla jakich wartości  $x$  funkcja  $f(x) = \frac{\sqrt{8-2^x}}{\log x}$  jest określona?  
 c) Określ dziedzinę funkcji:  $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4} + \frac{1}{\sqrt{27-3^x}}$ .
15. (R) Rozwiąż nierówność:  $h(g(x)) \geq \frac{1}{16}$ , jeżeli  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  i  $g(x) = x^2 - 5$ .
16. (R) Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność:  
 a)  $\frac{1}{2^x-1} < \frac{1}{2^{x+1}}$   
 b)  $4^x - 4^{x-1} + 4^{x-2} - 4^{x-3} + \dots < 1$
17. (R) Rozwiąż układ równań:  $\begin{cases} 3^x \cdot 5^{y+1} = 9 \\ 3^{x-2} + 5^{y+2} = 6. \end{cases}$
18. (R) Nie korzystając z kalkulatora, oblicz:  
 a)  $\log_{\frac{1}{9}} \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$   
 b)  $9^{6 \log_{81} 2 + \log_3 2}$   
 c)  $\log_{0,25} 27 \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{8}$
19. (R) Uporządkuj liczby od najmniejszej do największej:  $9^{\log_3 4 + \log_{\frac{1}{3}} 2}$ ,  $4^{\sqrt{3}}$ ,  $12 + \log_2 \frac{1}{16}$ ,  $8^{\sqrt{2}}$ .
20. (R) Wiemy, że  $\log_2 5 = a$ . Wyznacz  $\log_{25} 8$ .
21. (R) Sprawdź, czy funkcje  $f(x) = 2 \log_3 x$  i  $g(x) = \log_3 x^2$  są równe.
22. (R) Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \log_3(x-2) - 1$ .  
 a) Wyznacz dziedzinę i oblicz miejsce zerowe funkcji  $f$ .  
 b) Narysuj wykres funkcji  $y = |f(x)|$  i rozwiąż graficznie nierówność  $|f(x)| > 1$ .
23. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji:  
 a)  $y = \log_{(x-1)}(3-x)$   
 b)  $y = \log_{\frac{1}{3}} \log_5 |x+1|$
24. (R) Określ dziedzinę funkcji  $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 5x + 4) - \log_{0,5}(5x - 5) + 1}$ .
25. (R) Dla jakiej wartości parametru  $m$  funkcja:  
 a)  $f(x) = \log_{(m-2)} x$  jest malejąca?  
 b)  $f(x) = \log_{(m-2)}(-x)$  jest malejąca?  
 c)  $f(x) = \log_{(m^2-1)} x$  jest rosnąca?
26. (R) Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \sqrt{2 \log_{0,5} x + 8}$ .  
 a) Określ dziedzinę tej funkcji.  
 b) Rozwiąż równanie  $\sqrt{2 \log_{0,5} x + 8} = \log_{0,5} x$ .
27. (R) Dla jakich argumentów  $x$  funkcja  $f(x) = \log_{0,1} |x-8|$  przyjmuje wartości dodatnie?

28. (R) Dana jest funkcja  $f(x) = \log_2 x$ .
- Oblicz  $\frac{f(12) - f(2)}{f(3)}$ .
  - Podaj zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) < 0$ .
  - Rozwiąż równanie  $2f^2(x) - 5f(x) + 2 = 0$ .

29. (R) Zaznacz na płaszczyźnie w układzie współrzędnych zbiór:

$$F = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge \log_{\frac{1}{3}}(|x| - 2) \geq -2 \wedge |y| - 5 \leq 0\}$$

oraz napisz równania osi symetrii otrzymanej figury.

30. (R) Rozwiąż równanie:
- $\log(x + 1, 5) = -\log x$
  - $\log_2 x + 1 = 2\log_x 2$
  - $\log_x(3x + 4) = 2$
  - $\frac{2}{\log_3 x - 1} + 1 = 6\log_x 3$
  - $x^{1 + \log_2 x} = 4$

31. (R) Rozwiąż nierówność:
- $\log_3 |x + 3| < 0$
  - $\log_2(\log_{\frac{1}{5}}(x - 1)) > 1$
  - $\log_x(x + 2) \leq 2$
  - $\log^3 2x - \log^2 2x \geq 0$
  - $\log_{0,5}(x + 4) - \log_{0,5}(3x - 1) \leq 0$

32. (R) Niech  $A = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x - 1) < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$ . Wyznacz zbiory:  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ .

33. (R) Rozwiąż równanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2 4x + \log_2^2 4x + \log_2^3 4x + \dots + \log_2^n 4x) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 x.$$

34. (R) Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, którym  $a_1 = \log_3 x$  i iloraz  $q = \log_3 x$ . Oznaczmy przez  $f(x)$  sumę tego ciągu.
- Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ .
  - Rozwiąż nierówność  $f(x) > 1$ .

35. (R) Rozwiąż równanie:  $1 + \log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots = 3$ .

36. (R) Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x + y = 8^{\log_8 12} \\ x^2 + y^2 - 2xy = \log_2 144 - \frac{1}{2} \log_2 81 \end{cases}$$

37. (R) Dany jest ciąg  $(x_n)$ , o wyrazach dodatnich, w którym

$$\begin{cases} \log_2 x_1 = -2 \\ \log_2 x_n - \log_2 x_{n-1} = -2, \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} \end{cases}$$

Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{3}.$$

38. (R) Rozwiąż nierówność  $\frac{2+m^{2x}}{1-m^x} > -6$  przy założeniu, że wartość parametru  $m$  należy do przedziału  $(0, 1)$ .