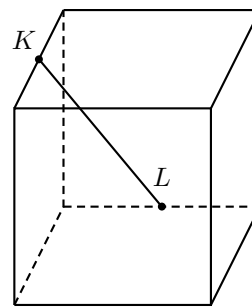
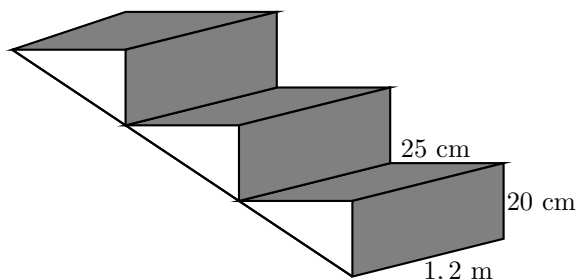


1. Oblicz długość odcinka KL łączącego środki dwóch krawędzi sześcianu, którego krawędź ma długość 6.



2. Przekątna d prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Krawędź podstawy ma długość 4.
 - a) Wyznacz długość przekątnej d .
 - b) Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
 - c) Zaznacz na rysunku kąt nachylenia przekątnej d do ściany bocznej prostopadłościanu.
3. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole podstawy jest równe 81 cm^2 a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy ma miarę 60° .
4. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, którego przekątna ściany bocznej ma długość b , zaś podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości a .
5. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4cm.
6. Należy dwukrotnie pomalować powierzchnię boczną pięciu kolumn mających kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy jest równa 40 cm, a wysokość 5 m. Przy pierwszym malowaniu litr farby wystarcza na pokrycie 10 m^2 powierzchni, a przy drugim - zużyto o 20% farby mniej. Ile należy kupić pięciolitrowych puszek farby?

7. Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni, których wymiary podano na rysunku. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.



8. Podstawą ostrosłupa o wysokości h jest trójkąt równoboczny. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do podstawy, a trzecia tworzy z podstawą kąt o mierze α . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
9. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa czworokątnego prawidłowego jest równe 27 cm^2 . Krawędź jego podstawy ma długość 3 cm.
 - a) Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.
 - b) Naskicuj jego siatkę.
 - c) Oblicz jego objętość.
 - d) Wyznacz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
10. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między krawędzią boczną ostrosłupa i jego wysokością ma miarę 30° , a krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Oblicz objętość ostrosłupa.
11. Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie 240° i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.
12. Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka, o średnicy 60 cm i tworzącej 50 cm, sięga połowy jego wysokości. Do zbiornika wlewamy wodę w tempie $25 \text{ cm}^3/\text{s}$. Po ilu minutach zbiornik będzie pełny? (Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3$.)

13. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, o przyprostokątnej $3\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej 6, wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną otrzymujemy bryłę. Oblicz objętość tej bryły i wyznacz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.
14. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, równoramiennego, o przyprostokątnej długości 6, wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną otrzymujemy bryłę obrotową. Oblicz jej objętość i pole powierzchni.
15. Wzór na objętość stożka ściętego ma postać

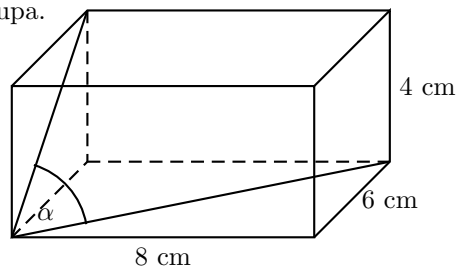
$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2),$$

gdzie R oznacza promień dolnej podstawy stożka, r - promień górnej podstawy stożka i h - wysokość stożka ściętego.

Pewne naczynie ma kształt stożka ściętego, w którym $R = 4$, $r = 2$ oraz $h = 6$. Naczynie zostało wypełnione wodą do połowy wysokości. Jaki procent objętości całego naczynia stanowi objętość wody? Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1%.

16. Pojemnik do przechowywania gazu ma kształt walca, o wysokości 3 m, zakończonego z obu stron półkolistymi kopułami. Wiedząc, że pole jego powierzchni całkowitej jest równe $4\pi \text{ m}^2$, oblicz objętość pojemnika.
17. Piętrowy tort przygotowany na bal maturalny składał się z pięciu warstw, z których każda miała kształt walca. Długości promieni walców, wyrażone w cm były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $a = -5$. Długość promienia podstawy środkowej warstwy tego tortu była równa 20 cm, a jej objętość $3200\pi \text{ cm}^3$. Wszystkie warstwy wykonane były z tego samego rodzaju ciasta i miały jednakową wysokość. Oblicz, ile mąki należało przygotować do wypieku całego tortu, jeżeli receptura przewiduje wykorzystanie 0,24 kg mąki do wypieku warstwy środkowej.
18. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość walca.
19. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0,25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?
20. Przyjmując, że Ziemia jest kulą o promieniu $r = 6370$ km, oblicz jej pole powierzchni. Jaki procent powierzchni Ziemi stanowi powierzchnia lądów a jaki powierzchnia Polski, gdy łączna powierzchnia lądów jest równa 149 mln km^2 a Polski wynosi 322,6 tys. km^2 .
21. a) Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa $36\pi \text{ cm}^3$, a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Podaj objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?
b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?
22. a) W kulę o promieniu 8 cm wpisano walec o promieniu podstawy 4 cm. Oblicz objętość walca.
b) Na sześcianie o krawędzi długości a opisano kulę w ten sposób, że wierzchołki sześcianu należą do powierzchni kuli. Oblicz objętość kuli.
c) W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano kulę o promieniu 2. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do jego podstawy pod kątem 60° . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.
23. (R) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy równa się $12\sqrt{3}$. Pole przekroju płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i wierzchołek górnej podstawy - $20\sqrt{3}$. Oblicz sinus kąta nachylenia płaszczyzny tego przekroju do płaszczyzny podstawy graniastosłupa.

24. (R) Prostopadłościenne pudełko ma wymiary $8\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Wyznacz miarę kąta α w zaokrągleniu do 1° między przekątną podstawy pudełka, a przekątną tej ściany bocznej, która ma wymiary $6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$.

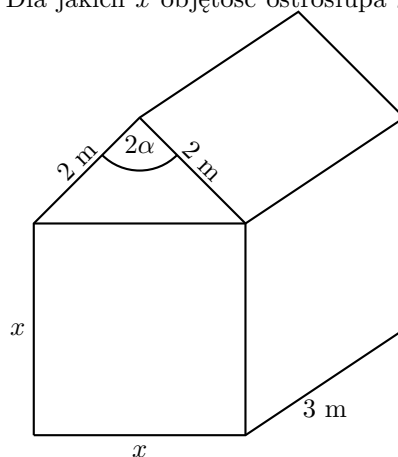


25. (R) Oblicz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną zawierającą przekątną jednej ściany i środki dwóch krawędzi przeciwległej ściany.
26. (R) Oblicz odległość wierzchołka sześcianu, którego krawędź ma długość a , od tej przekątnej sześcianu, do której ten wierzchołek nie należy.
27. (R) W prostopadłościanie o podstawach $ABCD$ i $EFGH$ mamy $|AB| = 6$, $|BC| = 5$ i $|AE| = 12$. Niech S będzie punktem krawędzi AE oraz $|AS| = x$, gdzie $0 < x < 12$. Dla jakich x objętość ostrosłupa $SEFH$ jest większa od objętości ostrosłupa $SABCD$?

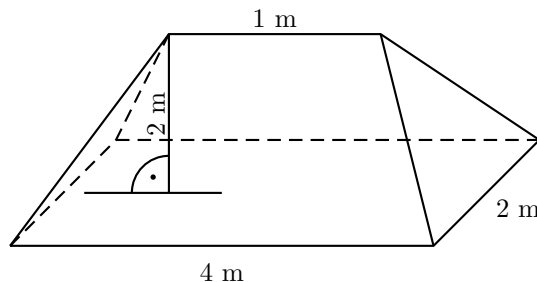
28. (R) Drewnutnia ma kształt prostopadłościanu, nakrytego dwuspadowym dachem. Wymiary drewnutni przedstawiono na rysunku.

a) Wyznacz objętość użytkową drewnutni (objętość prostopadłościanu w m^3) jako funkcję α .

b) Dla jakiego kąta $\alpha \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \rangle$ objętość użytkowa drewnutni jest największa?



29. (R) W kulę o promieniu $R = 4$ wpisano sześcian. Oblicz jaki procent objętości kuli stanowi objętość sześcianu. Wynik podaj z zaokrągleniem do 1%.
30. (R) Wierzchołek namiotu w kształcie czworokątnego ostrosłupa prawidłowego jest podtrzymywany przez maszt o długości 1,5 m. Wyznacz długość krawędzi jego podstawy, wiedząc, że pole powierzchni materiału zużytego na uszycie tego namiotu wraz z podłogą (pomijamy szczyt) jest równa $8 m^2$.
31. (R) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $a = 4$, zaś krawędź boczna $b = 7$.
- a) Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- b) Wyznacz cosinus kąta między krawędziami bocznymi nie należącymi do jednej ściany bocznej tego ostrosłupa.
32. (R) Oblicz objętość narysowanej przyzmy, której krawędzie boczne są równej długości.



33. (R) Do salaterki wiano rozpuszczoną galaretkę, która po zastygnięciu przybrała kształt stożka ściętego. Przekrój osiowy tej bryły był trapezem równoramiennym o wysokości 6 cm i podstawach długości 14 cm i 26 cm. Oblicz objętość wlanego płynu. W obliczeniach przyjmij, że $\pi = 3,14$, a wynik podaj z zaokrągleniem do $1 cm^3$.
34. (R) Pole powierzchni kuli wpisanej w stożek jest równe polu podstawy. Oblicz:
- a) stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni bocznej stożka,
- b) jaką część objętości stożka jest objętość kuli?
35. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły będzie maksymalna?
36. (R) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość równą $2\sqrt{3}$. Jaką największą objętość może mieć ten walec?
37. (R) W stożek, którego wysokość ma długość $H = 12$ dm, a promień jego podstawy ma długość $R = 4$ dm wpisano walec, o podstawach równoległych do podstawy stożka. Jakie powinny być wymiary walca, aby jego objętość była największa?