1. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
   a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.
   b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geqslant 0$.

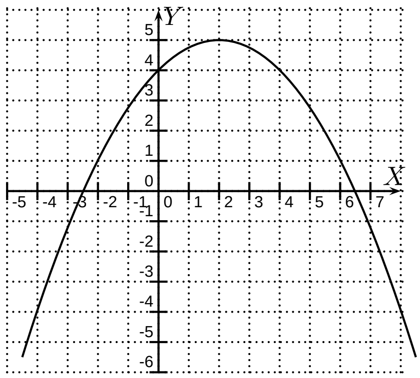
2. Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ osiąga największą wartość równą 6 dla argumentu $x = 2$. Znajdź wzór tej funkcji, wiedząc, że $x = -1$ to jedno z miejsc zerowych tej funkcji.

3. Wiedząc, że liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx - 12$, wyznacz współczynnik b oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji. Przedstaw wzór funkcji w postaci kanonicznej i iloczynowej.

4. **a)** Wyznacz współczynnik b tak, aby przedział $\langle -8, \infty)$ był zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 + bx + 1$.
   b) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (1 - x)(x + 1) + 2x$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

5. Zbiorem wartości funkcji kwadratowej g jest przedział $(-\infty, 5\rangle$, a zbiorem rozwiązań nierówności $g(x) > 0$ jest przedział $(2, 8)$. Wyznacz wzór funkcji g.

6. Dla każdej liczby rzeczywistej b równanie $y = \frac{1}{2}x^2 - bx + 2$ opisuje pewną parabolę. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których wierzchołek paraboli leży nad osią OX.



7. Pewna parabola o wierzchołku $W = (2, 5)$ przecina oś w punkcie $A = (0, 4)$. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.

8. Wyznacz współczynniki b i c trójmianu $y = x^2 + bx + c$, jeśli spełniony jest warunek:
   a) trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 7 dla $x = -1$,
   b) trójmian przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-1, 4)$,
   c) wykres trójmianu jest symetryczny względem prostej $x = 3$ i przecina oś OY w punkcie $(0, 5)$.

9. Znajdź wzór funkcji kwadratowej $y = f(x)$, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(1, -9)$ przechodząca przez punkt o współrzędnych $(2, -8)$. Otrzymaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej. Oblicz jej miejsca zerowe i naszkicuj wykres.

10. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale:
    a) $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \in \langle -1, 3\rangle$,
    b) $f(x) = x^2 + 4x + 4, \quad x \in \langle -4, -3\rangle$,
    c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 11, \quad x \in \langle 0, 4\rangle$.

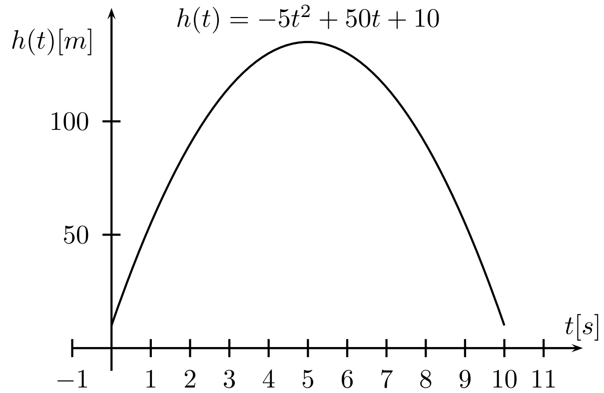
11. Funkcja kwadrtowa f określona wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma jedno miejsce zerowe oraz do jej wykresu należą punkty $A = (0, 1)$ i $B = (2, 9)$.
    a) Wyznacz wartości współczynników a, b i c.
    b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
    c) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji.

12. Jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej f jest liczba 5, maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest malejąca to $\langle 2, +\infty)$. Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -8, -7\rangle$ jest równa (-24). Wyznacz wzór funkcji f i narysuj jej wykres.

13. Podaj miejsca zerowe funkcji określonych dla wszystkich liczb rzeczywistych x :
    $f(x) = x(x + 2)$, $g(x) = (x - 5)(x + 2)$, $h(x) = (5 - 2x)(2x + 1)$.

14. Druga współrzędna punktu M należącego do wykresu funkcji określonej wzorem $y = x^2 - x + 1$ jest mniejsza od $9\frac{1}{2}$. Podaj największy przedział, do którego należy pierwsza współrzędna.

15. Pocisk wystrzelony pionowo w górę, po osiągnięciu maksymalnego punktu toru, spada w dół. Funkcja $h(t) = -5t^2+50t+10$ przyporządkowuje czasowi t (w sekundach) lotu wysokość h (w metrach), na której znajduje się pocisk. Oblicz maksymalną wysokość, na której znajdował się pocisk.



16. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -4, -2\rangle$ połowę kwadratu tej liczby pomniejszoną o 8.
 a) Podaj wzór tej funkcji.
 b) Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale.

17. Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie dodatniej x różnicę liczb wyrażających pole kwadratu o boku x i długości przekątnej tego kwadratu.
 a) Podaj wzór funkcji f i narysuj jej wykres.
 b) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle \frac{\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2}\rangle$.

18. W roku 2005 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek sprzed 10 lat pomnożę przez swój wiek za 11 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia". Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je i zapisz, w którym roku urodził się ten jubilat.

19. Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

20. Sklep sprowadza z hurtowni kurtki płacąc po 100 zł za sztukę i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

21. Funkcja kwadratowa $f(x) = -\frac{1}{2}x^2+bx+c$ przyjmuje jednakowe wartości dla argumentów 1 i 5. Do wykresu tej funkcji należy początek układu współrzędnych.
 a) Wyznacz wartości współczynników b i c.
 b) Dla wyznaczonych wartości współczynników b i c naszkicuj wykres funkcji f.

22. Wykaż, że dla $m = 3$ nierówność $x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x.

23. Wyznacz dziedziny funkcji: $f(x) = \sqrt{(1-x)(3-x)}$ oraz $g(x) = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{3-x}$. Sprawdź, czy te dziedziny są równe.

24. **a)** Liczbę 42 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, by różnica ich kwadratów była równa 168.
 b) Jeżeli odejmiemy od danej liczby jej odwrotność, to otrzymamy $\frac{9}{20}$. Jaka to liczba?
 c) Kwadrat piątej części stada małp zmniejszonej o 3 schował się w jaskini. Została na widoku jedna małpa, która weszła na drzewo. Ile było małp?
 d) Znajdź trzy kolejne liczby parzyste tak, aby suma kwadratów dwóch mniejszych liczb była równa kwadratowi trzeciej liczby.

25. Rozwiąż układy nierówności:
 a) $\begin{cases} |x+4| \geqslant 2 \\ -5(x-1) > x(x-1) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (2x+1)^2 - 2x^2 - 10x \geqslant 5 + (x-1)^2 \\ 2 - \frac{2x+5}{2} < \frac{1-2x}{4} \end{cases}$

26. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.

 a) Najmniejsza wartość funkcji f jest liczbą dodatnią dla:
 (A) $f(x) = x^2 - 2x + 2$,
 (B) $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$,

(C) $f(x) = (x-19)^2 - \frac{1}{4}$.

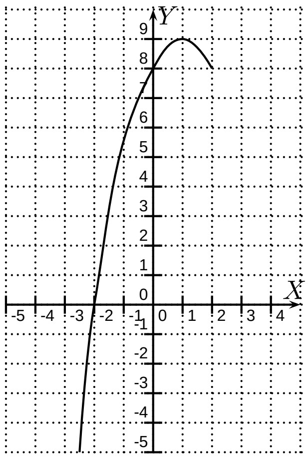
b) Miejscami zerowymi funkcji $y = 4x^2 + bx + c$ są liczby 5 i -3, zatem:
(A) $b = 2$ i $c = -8$,
(B) $b = -2$ i $c = -15$,
(C) $b = -8$ i $c = -60$.

c) Równanie $2x^2 + 3x + m = 0$ nie ma rozwiązań wtedy i tylo wtedy, gdy:
(A) $m < \frac{9}{8}$,
(B) $m \in \left(\frac{9}{8}, \infty\right)$,
(C) $m > 1,125$.

d) $\mathbb{R}$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:
(A) $5x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$,
(B) $-4x^2 - 1 < 0$,
(C) $x^2 + 3 > 0$.

e) Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $x^2 > 4$ jest:
(A) $(2; \infty)$,
(B) $(-2, 2)$,
(C) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

f) Na podstawie fragmentu wykresu funkcji kwadratowej $f(x)$ wskaż, które zdanie jest prawdziwe.
(A) Miejscami zerowymi funkcji są liczby: -2 oraz 4.
(B) Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-2, 4)$.
(C) Funkcja przyjmuje wartości większe od zera dla $x < 1$.
(D) Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, 9)$.

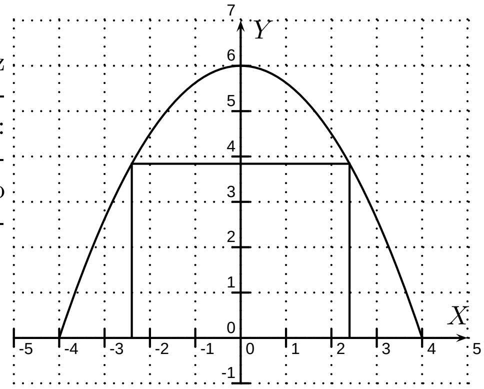


27. (R) Rozwiąż równania:
a) $x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$
b) $\sqrt{x-1} = x - 3$
c) $|x| + |1 - x^2| = 1$
d) $|x^2 + 4x - 5| + |x^2 + 4x| = 5$.

28. (R) Rozwiąż nierówność:
a) $5\sqrt{x-3} > x + 1$
b) $|4x^2 - 4x + 3| < 2$
c) $(|x| - 2)^2 \leqslant 1$
d) $|x| + |x - 2| \geqslant x^2 - 2x + 1$.

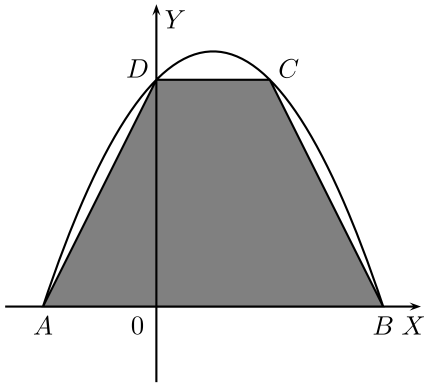
29. (R) W pewnej klasie było 21 uczniów. Klasa podzieliła się na dwie grupy. Każdy uczeń z okazji zakończenia roku szkolnego podarował upominek wszystkim pozostałym kolegom ze swojej grupy. Jakie liczne byly grupy, jezeli liczba upominków była najmniejsza z możliwych.

30. (R) Jednokierunkowa droga o szerokości 8 m prowadzi przez tunel. Przekrój poprzeczny tunelu, przedstawiony na rysunku, ma kształt zbliżony do łuku paraboli o równaniu: $y = -\frac{3}{8}x^2 + 6$. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy ciężarówka wioząca prostopadłościenny kontener o szerokości $4,8$ m może przejechać tym tunelem, jeżeli najwyższy punkt kontenera znajduje się 4 m nad drogą.



31. (R) Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi OX. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

32. (R) Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi OX, wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$ z osią OY. Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



33. (R) Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x, dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x, dla których przyjmuje minima lokalne.

34. (R) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.
a) Narysuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -4, 3)$.
b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$, której dziedziną jest zbiór $(-5,-2) \cup (-2,2) \cup (2,5)$.
c) Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$.

35. (R) Dane jest równanie $x^2 + bx + c = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wartości b oraz c tak, by były one rozwiązaniami danego równania.

36. (R) Dane jest równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$ z niewiadomą x. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej m wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami całkowitymi.

37. (R) Dane jest równanie $x^2 + (3m - 2)x = -m - 2$ z niewiadomą x. Sformułuj warunki, jakie powinien spełniać parametr m, by to równanie miało dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest dodatnia.

38. (R) Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których funkcja $f(x) = x^2 - 2^k \cdot x + 2^k + \frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

39. (R) Wyznacz wartości parametru a, dla których równanie $ax^2 - (a + 2)x + a + 2 = 0$ ma różne pierwiastki dodatnie.

40. (R) Wyznacz takie wartości parametru m, dla których rozwiązania x_1 i x_2 równania $x^2 + 13x - 24 = (10 - m)x - 15$, spełniają warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = -3x_1x_2.$$

41. (R) Dla jakich wartości parametru m równanie: $-x^2 + 4x = m$ ma dwa pierwiastki, z których każdy jest większy od 1.

42. (R) Jaki prostokąt o obwodzie równym 10 cm ma najkrótszą przekątną.

43. (R) Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{C}$, pierwiastki funkcji kwadratowej zadanej wzorem $f(x) = x^2 - 3x + m + 1$ spełniają nierówność:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} > 1?$$

44. (R) Dla jakich wartości parametru k rozwiązania równania $x^2 - (k+1)x + \frac{6k}{5} = 0$ są równe sinusowi i cosinusowi tego samego kąta?