

1. (RR) Oblicz granicę funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{3x^2 - 4x - 4}$ w punkcie $x_0 = 2$,

b) $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$ w punktach $x_0 = 2$, $x_0 = -2$ oraz przy $x \rightarrow \infty$,

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{6 - 2x}$ w punkcie $x_0 = 3$,

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ przy $x \rightarrow \infty$,

e) $f(x) = \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$ w punkcie $x_0 = 1$,

f) $f(x) = \frac{64 - x^3}{x - 4}$ w punkcie $x_0 = 4$,

g) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ przy $x \rightarrow -\infty$,

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ przy $x \rightarrow \infty$,

i) $f(x) = \frac{\sin 3x}{4x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

2. (RR) Wyznacz równania asymptot funkcji:

a) $f(x) = \frac{3x - 6}{2x + 2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{1 - x}$

3. (RR) Dana jest funkcja $f(x) = x^4$.

a) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ dla $h = 0, 1$.

b) Do jakiej liczby dąży wartość wyrażenia $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, gdy wartość h dąży do zera?

4. (RR) Oblicz granicę funkcji

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}.$$

5. (RR) a) Dla jakiej wartości parametru k zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (k+1)x + k}{x^2 - 1} = 5.$$

b) W zależności od parametru $k \in \mathbb{R}$ oblicz granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{kx + 1}}{x}.$$

6. (RR) Naszczuj wykres pewnej funkcji f , która spełnia następujące warunki:

a) dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$,

b) jest ciągła w swojej dziedzinie,

c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

7. (RR) a) Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ -5, & x = 2 \end{cases}$$

b) Wykonaj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ m - x, & x > 0 \end{cases}$ dla tej wartości parametru m , dla której

funkcja f jest ciągła.

c) Niech

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x \geq 2 \\ mx + 1, & x < 2 \end{cases}$$

Wyznacz wartość parametru m tak, aby funkcja była ciągła. Dla wyznaczonej wartości parametru m :

- sporządź wykres funkcji,
- zapisz wzór funkcji z użyciem wartości bezwzględnej.

8. (RR) Trzy walce, każdy o wysokości 5 m o promieniach podstaw odpowiednio równych: 3 m, 2 m, 1 m, postawiono jeden na drugim.
- a) Wyraż pole przekroju bryły utworzonej przez te walce, płaszczyzną równoległą do podstaw walców jako funkcję odległości tego przekroju od płaszczyzny dolnej podstawy największego walca.
- b) Czy ta funkcja jest ciągła?
- c) Sporządź jej wykres.
9. (RR) Wyznacz pochodną funkcji:
- a) $f(x) = -3x^2 + x$ dla $x_0 = 0$,
- b) $f(x) = (x - 2)^2(1 - x^2)$,
- c) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{3x - x^2}$,
- d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$,
- e) $f(x) = \cos^2 x$,
- f) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$,
- g) $f(x) = \sqrt{7x^2 + x}$,
- h) $f(x) = \operatorname{tg}(1 - x^2)$.
10. (RR) a) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 3x^2 - x + 4$ oraz punkt $M = (1, y_0)$ należący do wykresu tej funkcji. Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie M . Wyznacz równanie tej stycznej.
- b) Wyznacz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{1 - x^2}$ w $x_0 = 2$.
- c) Wyznacz kąt, który styczna do wykresu funkcji w punkcie o odciętej $x_0 = \frac{1}{2}$ tworzy z dodatnią półosią osi OX, gdy $f(x) = 2\sqrt{3}x^4$.
- d) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 8x - x^4$ w punktach jej przecięcia z osią OX.
- e) Dla jakiej wartości parametru m prosta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^4 + m$.
11. (RR) Na wykresie funkcji $f(x) = x^2 - x + 3$ wyznacz taki punkt P , w którym styczna do tego wykresu jest równoległa do prostej o równaniu $y = 7x - 2$.
12. (RR) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$, o której wiadomo, że $f(3) = 5$ i $f'(1) = -3$.
- a) Wyznacz wzór tej funkcji i określ jej dziedzinę.
- b) Wyznacz miejsca zerowe.
13. (RR) a) Uzasadnij dlaczego funkcja $f(x) = 3x + 2\sin x$ nie posiada ekstremum.
- b) Dla jakiej wartości parametru m liczba $x_0 = 1$ jest miejscem zerowym pochodnej funkcji $f(x) = x^3 - 2mx^2 + 2$.
- c) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = 5x + \cos 4x$.
14. (RR) Wyznacz parametry a, b wiedząc, że funkcja $y = x^3 + ax + b$ w punkcie $x = 3$ osiąga ekstremum równe 1.
15. (RR) Wyznacz zbiór wartości funkcji o wzorze $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ określonej na przedziale $\langle 2, 3 \rangle$.
16. (RR) Dla jakich wartości parametru m funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - 2x^2 + (m-3)x + 1$ jest funkcją rosnącą w \mathbb{R} .
17. (RR) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.
- a) Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ wiedząc, że $f(0) = 8$.
- b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

18. (RR) Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - px^2 + 5x - 2$.
- Znajdź taką wartość parametru p , dla której funkcja f osiąga minimum w punkcie $x = 5$.
 - Dla wyznaczonego p podaj przedziały monotoniczności funkcji f .
19. (RR) Funkcja $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$ przyjmuje dla argumentu p wartość 8, a jej pochodna ma dla argumentu p wartość 0.
- Oblicz p .
 - Wyznacz ekstrema funkcji f .
 - Podaj przedziały mmonotoniczności funkcji f .
20. (RR) Zbadaj monotoniczność i ekstrema funkcji $f(x) = 6x^2 - x^3$.
21. (RR) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$.
22. (RR) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.
23. (RR) Funkcja f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem $f(x) = x^2 - mx$.
- Dla jakich wartości m , funkcja f jest malejąca w przedziale $(-1, 1)$?
 - Dla $m = 3$ wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 4 \rangle$.
24. (RR) Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ osiąga ekstremum w punkcie $x_0 = 1$? Wyznacz drugie ekstremum i określ rodzaj każdego z nich.
25. (RR) Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:
- $f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x + 1$ w $\langle 0, 3 \rangle$,
 - $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{2(x-2)}$ w $\langle -3, 1 \rangle$.
26. (RR) Okno ma kształt prostokąta zakończonych na górze półkolem. Jaka powinna być podstawa prostokąta, żeby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?
27. (RR) Jaki prostokąt o obwodzie 36 cm ma najkrótszą przekątną?
28. (RR) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12. Jaka powinna być długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa, aby jego objętość była maksymalna?
29. (RR) Przez punkt $P = (-1, 4)$ prowadzimy proste przecinające układ współrzędnych w punktach $A = (x, 0)$, $B = (0, y)$, przy czym $x < 0$ i $y > 0$. Wyznacz równanie tej z nich, dla której suma odległości punktów A i B od początku układu współrzędnych jest najmniejsza.
30. (RR) Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = x^3 - 6x^2 + c$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$.
- Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$, wiedząc, że $f(0) = 8$.
 - Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .
31. (RR) Funkcja f ma następujące własności:
- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
 - f jest funkcją nieparzystą,
 - f jest funkcją ciągłą oraz:
 $f'(x) < 0$ dla $x \in (-8, -3)$,
 $f'(x) > 0$ dla $x \in (-3, -1)$,
 $f'(x) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$,
 $f'(-3) = f'(-1) = 0$,
 $f(-8) = 0$,
 $f(-3) = -2$,
 $f(-2) = 0$,
 $f(-1) = 1$.
- W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.