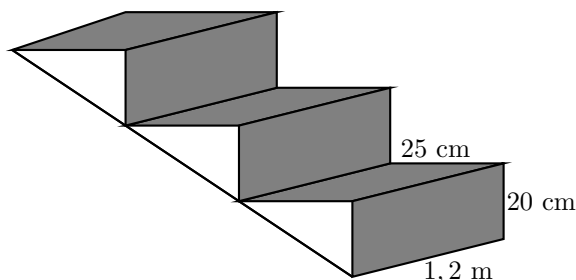


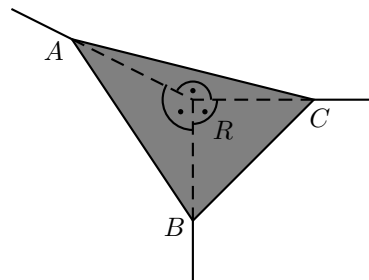
- Oblicz długość odcinka KL łączącego środki dwóch krawędzi sześcianu, którego krawędź ma długość 6.
- Przekątna d prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Krawędź podstawy ma długość 4.
 - Wyznacz długość przekątnej d .
 - Oblicz objętość tego prostopadłościanu.
 - Zaznacz na rysunku kąt nachylenia przekątnej d do ściany bocznej prostopadłościanu.
- W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości m jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wiadomo, że $\sin \alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.
- W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.
- Dany jest graniastosłup czworokątny prosty $ABCDEFGH$ o podstawach $ABCD$ i $EFGH$ oraz krawędziach bocznych AE, BF, CG, DH . Podstawa $ABCD$ graniastosłupa jest rombem o boku długości 8 cm i kątach ostrych A i C o mierze 60° . Przekątna graniastosłupa CE jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Sporządź rysunek pomocniczy i zaznacz na nim wymienione w zadaniu kąty. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC i $A'B'C'$ oraz krawędziach bocznych AA', BB', CC' . Kąt między przekątną ściany bocznej AC' a krawędzią podstawy AC ma miarę α . Promień okręgu wpisanego w podstawę graniastosłupa ma długość r . Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa wiedząc, że ma on 18 krawędzi i każda z nich jest równa 4 cm.
- Należy dwukrotnie pomalować powierzchnię boczną pięciu kolumn mających kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy jest równa 40 cm, a wysokość 5 m. Przy pierwszym malowaniu liter farby wystarcza na pokrycie 10 m^2 powierzchni, a przy drugim - zużyto o 20% farby mniej. Ile należy kupić pięciolitrowych puszek farby?



- Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni, których wymiary podano na rysunku. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.
- Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° .
 - Sporządź pomocniczy rysunek i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.
 - Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia 1 m^2 potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.
- W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

12. Pole powierzchni całkowitej prawidłowego ostrosłupa trójkątnego równa się $144\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

13. Narożnik między dwiema ścianami i sufitem prostopadłościennego pokoju należy zamaskować trójkątnym fragmentem płyty gipsowo-kartonowej (patrz rysunek). Wiedząc, że $|RA| = |RB| = |RC| = 1$ m, oblicz objętość narożnika zamaskowanego tą płytą. Wynik zaokrąglij do 0,01 m³.



14. Każda krawędź boczna ostrosłupa ma długość 17 cm. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 18 cm i 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.
15. Prostokąt $ABCD$ obracając się wokół boku AB , zakreślił walec w_1 . Ten sam prostokąt obracając się wokół boku AD , zakreślił walec w_2 . Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.
16. Pojemnik do przechowywania gazu ma kształt walca, o wysokości 3 m, zakończonego z obu stron półkolistymi kopułami. Wiedząc, że pole jego powierzchni całkowitej jest równe 4π m², oblicz objętość pojemnika.
17. Piętrowy tort przygotowany na bal maturalny składał się z pięciu warstw, z których każda miała kształt walca. Długości promieni walców, wyrażone w cm były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $a = -5$. Długość promienia podstawy środkowej warstwy tego tortu była równa 20 cm, a jej objętość 3200π cm³. Wszystkie warstwy wykonane były z tego samego rodzaju ciasta i miały jednakową wysokość. Oblicz, ile mąki należało przygotować do wypieku całego tortu, jeżeli receptura przewiduje wykorzystanie 0,24 kg mąki do wypieku warstwy środkowej.
18. Metalową kulę o promieniu 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość wynoszą odpowiednio 16 cm i 12 cm przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość walca.
19. Powierzchnią boczną stożka jest wycinek koła o kącie 240° i promieniu 12 cm. Oblicz pole podstawy tego stożka.
20. Poziom wody w zbiorniku w kształcie stożka, o średnicy 60 cm i tworzącej 50 cm, sięga połowy jego wysokości. Do zbiornika wlewamy wodę w tempie 25 cm³/s. Po ilu minutach zbiornik będzie pełny? (Do obliczeń przyjmij $\pi \approx 3$.)
21. Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.
22. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, o przyprostokątnej $3\sqrt{3}$ i przeciwprostokątnej 6, wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną otrzymujemy bryłę. Oblicz objętość tej bryły i wyznacz kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.
23. W wyniku pełnego obrotu trójkąta prostokątnego, równoramiennego, o przyprostokątnej długości 6, wokół prostej zawierającej przeciwprostokątną otrzymujemy bryłę obrotową. Oblicz jej objętość i pole powierzchni.
24. Wzór na objętość stożka ściętego ma postać

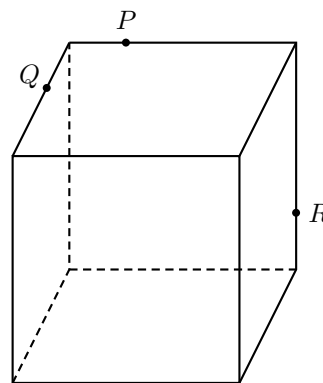
$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2),$$

gdzie R oznacza promień dolnej podstawy stożka, r - promień górnej podstawy stożka i h - wysokość stożka ściętego.

Pewne naczynie ma kształt stożka ściętego, w którym $R = 4$, $r = 2$ oraz $h = 6$. Naczynie zostało wypełnione wodą do połowy wysokości. Jaki procent objętości całego naczynia stanowi objętość wody? Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1%.

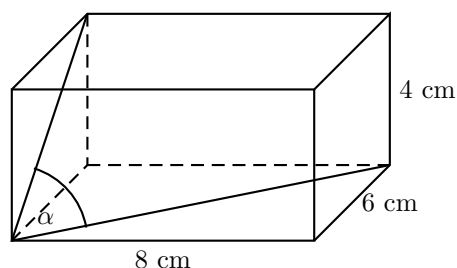
25. Metalową kulę o promieniu $R = 5$ cm w całości przetopiono na kuleczki o promieniu $r = 0,25$ cm. Ile uzyskano w ten sposób kuleczek?
26. Przyjmując, że Ziemia jest kulą o promieniu $r = 6370$ km, oblicz jej pole powierzchni. Jaki procent powierzchni Ziemi stanowi powierzchnia lądów a jaki powierzchnia Polski, gdy łączna powierzchnia lądów jest równa 149 mln km² a Polski wynosi 322,6 tys. km².
27. a) Dane są dwie kule. Objętość pierwszej kuli jest równa 36π cm³, a druga kula ma promień dwa razy dłuższy od promienia pierwszej kuli. Podaj objętość drugiej kuli. Jaki jest stosunek pól powierzchni tych kul?
b) Po dopompowaniu powierzchnia kulistego balonu zwiększyła się o 44%. O ile wzrosła objętość balonu?
28. a) W kulę o promieniu 8 cm wpisano walec o promieniu podstawy 4cm. Oblicz objętość walca.
b) Na sześciacie o krawędzi długości a opisano kulę w ten sposób, że wierzchołki sześciatu należą do powierzchni kuli. Oblicz objętość kuli.
c) W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano kulę o promieniu 2. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do jego podstawy pod kątem 60° . Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.
29. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.
- a) Sześciat o krawędzi 4 i graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 mają taką samą objętość. Wówczas:
(A) wielościany te mają takie samo pole powierzchni całkowitej,
(B) wysokość graniastosłupa jest równa 8
(C) pole ściany bocznej graniastosłupa jest dwa razy większe od pola ściany sześciatu.
- b) Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 1, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30° . Zatem:
(A) wysokość tego prostopadłościanu jest równa $\sqrt{2}$,
(B) przekątna tego prostopadłościanu ma długość 2,
(C) przekątna tego prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem 45° .
- c) W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Wtedy:
(A) wysokość jego ściany bocznej jest równa $2\sqrt{3}$,
(B) jego ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 30° ,
(C) wysokość tego ostrosłupa jest równa 3.
- d) Pole powierzchni całkowitej czworoscianu foremnego jest równe $16\sqrt{3}$. Zatem:
(A) jego krawędź ma długość 4,
(B) wysokość tego czworoscianu jest równa $4\sqrt{6}$,
(C) jego krawędź boczna tworzy z podstawą kąt α , taki że $\tan \alpha = \sqrt{2}$.
- e) Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o przekątnej $3\sqrt{2}$. Zatem:
(A) pole powierzchni bocznej tego walca jest równe 18,
(B) wysokość tego walca jest równa 3,
(C) w walec ten można wpisać kulę.
- f) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku 12. Wtedy:
(A) pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe 72π ,
(B) objętość tego stożka jest równa $72\sqrt{3}\pi$,
(C) promień kuli wpisanej w ten stożek jest równy $4\sqrt{3}$.

30. (R) Narysuj przekrój równoległoscianu płaszczyzną PQR.



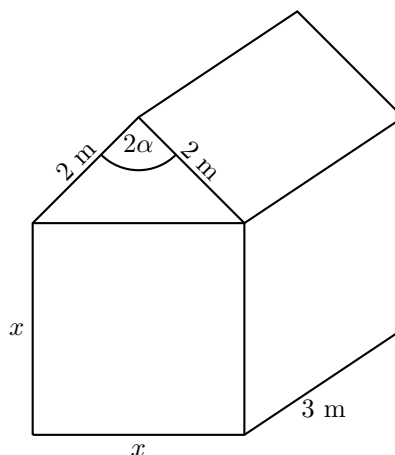
31. (R) W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy równa się $12\sqrt{3}$. Pole przekroju płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i wierzchołek górnej podstawy: $20\sqrt{3}$. Oblicz sinus kąta nachylenia płaszczyzny tego przekroju do płaszczyzny podstawy graniastosłupa.

32. (R) Prostopadłościenne pudełko ma wymiary $8\text{cm} \times 6\text{cm} \times 4\text{cm}$. Wyznacz miarę kąta α w zaokrągleniu do 1° między przekątną podstawy pudełka, a przekątną tej ściany bocznej, która ma wymiary $6\text{cm} \times 4\text{cm}$.



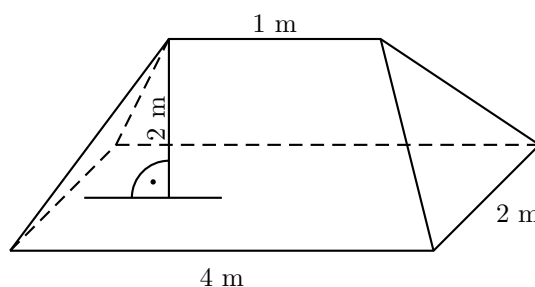
33. (R) Oblicz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną zawierającą przekątną jednej ściany i środki dwóch krawędzi przeciwległej ściany.
34. (R) Oblicz odległość wierzchołka sześcianu, którego krawędź ma długość a , od tej przekątnej sześcianu, do której ten wierzchołek nie należy.

35. (R) Drewnutnia ma kształt prostopadłościanu, nakrytego dwuspadowym dachem. Wymiary drewnutni przedstawiono na rysunku.
- a) Wyznacz objętość użytkową drewnutni (objętość prostopadłościanu w m^3) jako funkcję α .
- b) Dla jakiego kąta $\alpha \in \langle \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \rangle$ objętość użytkowa drewnutni jest największa?



36. (R) W kulę o promieniu $R = 4$ wpisano sześcian. Oblicz jaki procent objętości kuli stanowi objętość sześcianu. Wynik podaj z zaokrągleniem do 1%.
37. (R) Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 4. Odcinek DS jest wysokością ostrosłupa i ma długość 6. Punkt M jest środkiem odcinka DS . Oblicz pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną BCM .
38. (R) Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają długość 1. Wyznacz wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.
39. (R) Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$. Punkt M jest środkiem boku AB i $|AM| = |MC|$. Odcinek AS jest wysokością tego ostrosłupa. Wykaż, że kąt SCB jest prosty.

40. (R) Wierzchołek namiotu w kształcie czworokątnego ostrosłupa prawidłowego jest podtrzymywany przez maszt o długości 1,5 m. Wyznacz długość krawędzi jego podstawy, wiedząc, że pole powierzchni materiału zużytego na uszycie tego namiotu wraz z podłogą (pomijamy szczyt) jest równa 8 m^2 .
41. (R) Podstawą ostrosłupa o wysokości h jest trójkąt równoboczny. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do podstawy, a trzecia tworzy z podstawą kąt o mierze α . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
42. (R) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $a = 4$, zaś krawędź boczna $b = 7$.
- a) Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- b) Wyznacz cosinus kąta między krawędziami bocznymi nie należącymi do jednej ściany bocznej tego ostrosłupa.



43. (R) Oblicz objętość narysowanej przysmy, której krawędzie boczne są równej długości.
44. (R) Do salaterki wiano rozpuszczoną galaretkę, która po zastygnięciu przybrała kształt stożka ściętego. Przekrój osiowy tej bryły był trapezem równoramiennym o wysokości 6 cm i podstawach długości 14 cm i 26 cm. Oblicz objętość wlanego płynu. W obliczeniach przyjmij, że $\pi = 3,14$, a wynik podaj z zaokrągleniem do 1 cm^3 .
45. (R) Pole powierzchni kuli wpisanej w stożek jest równe polu podstawy. Oblicz:
- a) stosunek pola powierzchni kuli do pola powierzchni bocznej stożka,
- b) jaką część objętości stożka jest objętość kuli?
46. (R) Trójkąt równoramienny o obwodzie równym 16 cm obraca się dookoła podstawy. Dla jakiej długości boków trójkąta objętość otrzymanej bryły będzie maksymalna?
47. (RR) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość równą $2\sqrt{3}$. Jaką największą objętość może mieć ten walec?
48. (RR) W stożek, którego wysokość ma długość $H = 12 \text{ dm}$, a promień jego podstawy ma długość $R = 4 \text{ dm}$ wpisano walec, o podstawach równoległych do podstawy stożka. Jakie powinny być wymiary walca, aby jego objętość była największa?
49. (RR) Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.