

1. a) Sprawdź, czy wielomian  $w(x) = 8x^3 - 27$  jest równy wielomianowi  $p(x) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$ .  
 b) Wyznacz współczynniki  $a, b$  wielomianu  $w(x) = x^3 - ax^2 - 2x + b$ , gdy  $w(1) = 3$  i  $w(0) = -2$ .  
 c) Rozłóż wielomian na czynniki:  
 $p(x) = (2x - 4)^3 - (x - 2)^3$   
 $g(x) = -5x^5 + 30x^4 - 45x^3$   
 $z(x) = x^4 - 3x^3 + 8x - 24$
2. Wielomian  $P(x) = x^3 - 21x + 20$  rozłóż na czynniki liniowe, to znaczy zapisz go w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.
3. Pierwiastkiem równania  $2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m = 0$  jest liczba  $-1$ . Wyznacz wartość parametru  $m$  oraz pozostałe pierwiastki tego równania.
4. Dany jest wielomian  $W(x) = 2x^3 + ax^2 - 14x + b$ .  
 a) Dla  $a = 0$  i  $b = 0$  otrzymamy wielomian  $W(x) = 2x^3 - 14x$ . Rozwiąż równanie  $2x^3 - 14x = 0$ .  
 b) Dobierz wartości  $a$  i  $b$  tak, aby pierwiastkami wielomianu  $W(x)$  były liczby  $2$  i  $(-3)$ .
5. Liczby  $3$  i  $(-1)$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 30$ .  
 a) Wyznacz wartości współczynników  $a$  i  $b$ .  
 b) Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.
6. Dane są przedziały  $(-\infty, m^3 + 3)$  i  $(3m^2 + m, \infty)$ , gdzie  $m \in \mathbb{R}$ . Wyznacz wszystkie wartości  $m$ , dla których część wspólna tych przedziałów jest zbiorem jednoelementowym.
7. Liczby  $a, b, c$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie  $-2$ . Wartość wielomianu  $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  dla argumentu  $2$  jest równa  $4$ .  
 a) Oblicz  $w(-3)$ .  
 b) Oblicz resztę z dzielenia wielomianu  $w(x)$  przez dwumian  $x + 1$ .
8. Dane są wielomiany:  $Q(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$ ,  $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ . Oblicz wartości  $m$  i  $n$ , dla których wielomian  $W(x) = x^4 + (m - 4)x^3 - (2n + 6)x^2 - 38x - 3$  równy jest wielomianowi  $Q(x) - 2P(x)$ .
9. Pierwiastkiem równania  $2x^3 - (3m - 1)x^2 + 7x - m = 0$  jest liczba  $(-1)$ . Wyznacz wartość parametru  $m$  oraz pozostałe pierwiastki tego równania.
10. Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$ .  
 a) Wyznacz współczynnik  $k$  tego wielomianu wiedząc, że pierwiastkiem wielomianu jest liczba  $(-2)$ .  
 b) Dla wyznaczonej wartości  $k$  rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.
11. Dany jest wielomian  $w(x) = 2x^4 - ax^3 - bx^2 - cx + 3$ .  
 a) Wyznacz współczynniki tego wielomianu wiedząc, że  $c, a, b$  są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie  $q = 3$ , liczba  $-1$  jest pierwiastkiem tego wielomianu.  
 b) (R) Rozwiąż  $w(x) \leq 0$ .
12. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $x^3 + y^3$  wiedząc, że  $x + y = 2$ .
13. Rozwiąż równanie:  
 a)  $x^3 - x = x^2 - 1$   
 b)  $27x^7 = -8x^4$   
 c)  $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$
14. Rozwiąż nierówność:  
 a)  $-3x^2(x + 2)(x^2 + 1)(x + 1)^2 < 0$   
 b)  $x^3 \geq 81x$   
 c)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 < 0$
15. **Test wyboru.** Zaznacz poprawne odpowiedzi.  
 a) Wielomian  $W(x) = (a^2 - 5a - 6)x^3 + 3x^2 - 8x + 6$  jest wielomianem stopnia drugiego dla:  
 (A)  $a \in \mathbb{R}$       (B)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$       (C)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 6\}$       (D)  $a \in \{-1; 6\}$

b) Liczba  $-1$  jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ .

(R) Pozostałe pierwiastki tego wielomianu to:

(A)  $2, 3$       (B)  $6, 1$       (C)  $-2, -3$       (D)  $-1; 6$

c) Wskaż zbiór rozwiązań równania  $x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$ :

(A)  $\{-1; 3\}$       (B)  $\{1; -3\}$       (C)  $\{-3; -1; 1; 3\}$       (D)  $\emptyset$

d) Wskaż zbiór rozwiązań nierówności  $x(x+2)(1-x)(3+x) > 0$ :

(A)  $(-3; -2) \cup (0; 1)$       (B)  $(-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; \infty)$       (C)  $(-\infty; -3) \cup (-2; 1)$       (D)  $(-3; -2) \cup (1; \infty)$

e) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $(x^2 - 9)(x + 3)(x^2 + 4x + 3) \geq 0$ :

(A)  $\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$       (B)  $\langle -3; -1 \rangle \cup \{3\}$       (C)  $(-\infty; -3) \cup \langle -1; \infty \rangle$       (D)  $(-\infty; -3) \cup \langle -1; 3 \rangle$

f) Dany jest wielomian  $W(x) = x^4 + 9$ . Wskaż zdania prawdziwe:

(A) Wielomianu  $W(x)$  nie można rozłożyć na czynniki.

(B) Wielomian  $W(x)$  po rozkładzie na czynniki ma postać  $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 1)$

(C) Wielomian  $W(x)$  po rozkładzie na czynniki ma postać  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$

(D) Wielomian  $W(x)$  po rozkładzie na czynniki ma postać  $(x^2 - \sqrt{6}x + 3)(x^2 + \sqrt{6}x + 3)$

16. (R) Wykonaj dzielenie wielomianu  $w(x) = -3x^4 + 5x^3 + x^2 + 10x + 6$  przez  $q(x) = x^2 + 2$  i zapisz go w postaci  $w(x) = p(x)q(x) + r(x)$ .
17. (R) W wyniku dzielenia wielomianu  $w(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$  przez wielomian  $p(x)$  otrzymano iloraz  $q(x) = x^2 - 3x + 2$  i resztę  $r(x) = -1$ . Wyznacz wielomian  $p(x)$ .
18. (R) Nie wykonując dzielenia wielomianów:  
 a) wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $w(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  przez wielomian  $q(x) = x - \sqrt{2}$ .  
 b) sprawdź, czy wielomian  $w(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$  jest podzielny przez wielomian  $p(x) = x^2 - 3x + 2$ .
19. (R) Dla jakich wartości parametru  $a$  wielomian  $w(x) = a^2x^3 - 4ax + 5$  jest podzielny przez dwumian  $q(x) = x + 1$ .
20. (R) Niech  $w(x) = 2x^3 - 9x^2 - 38x + 21$ .  
 a) Wykaż, że  $(x + 3)$  jest dzielnikiem wielomianu  $w(x)$ .  
 b) Wielomian  $w(x)$  rozłóż na iloczyn czynników liniowych o współczynnikach całkowitych.
21. (R) Wiedząc, że liczby  $1$  i  $4$  są pierwiastkami wielomianu  $w(x) = x^4 + mx^3 + 9x^2 + 38x + n$  znajdź pozostałe pierwiastki i rozwiąż nierówność  $w(x) < 0$ .
22. (R) a) Dany jest wielomian  $w(x)$ . Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez  $(x + 1)$  wynosi  $2$ , przez  $(x - 8)$  wynosi  $-7$ , podaj wielomian, który jest resztą z dzielenia  $w(x)$  przez  $(x + 1)(x - 8)$ .  
 (R) b) Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa  $40$  cm. Krawędź podstawy ma długość  $x$ . Napisz wzór funkcji opisującej objętość tego graniastosłupa w zależności od  $x$ . Jakie są wymiary tego graniastosłupa, jeśli jego objętość jest równa  $36$  cm<sup>3</sup>?
23. (R) Wielomian  $W(x) = -2x^4 + 5x^3 + 9x^2 - 15x - 9$  jest podzielny przez dwumian  $(2x + 1)$ . Wyznacz pierwiastki tego wielomianu.
24. (R) Wyznacz wartości parametrów  $p, q$ , dla których liczba  $-1$  jest dwukrotnym pierwiastkiem równania  $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$ .
25. (R) Wyznacz wszystkie wartości  $k \in \mathbb{R}$ , dla których pierwiastki wielomianu  $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$  są trzema trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.
26. (R) Dla jakich wartości parametru  $m$  reszta z dzielenia wielomianu  $x^{17} - mx^{15} + (m - 2)x^{10} + 2x + m^2 - 2$  przez dwumian  $(x - 1)$  jest równa  $3$ ?
27. (R) Przedstaw wielomian  $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

**Wielomiany****mgr A. Piłat, mgr M. Małycha**

28. (R) Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie spełniające nierówność:  $x^3 + 90 \leq 2(x + 5)^2$ .
29. (R) Rozwiąż nierówność:  $x^3 - x^2 + 6|x - 1| \leq 0$ .
30. (R) Wyznacz dziedzinę funkcji  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{18x^3 - 3x^2 - 4x + 1}}$ .
31. (R) Funkcja  $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  osiąga ekstremum  $y = -4$  dla  $x = 1$ . Wyznacz współczynniki  $a, b, c$  tej funkcji wiedząc, że do jej wykresu należy punkt  $B = (0, -2)$ . Rozwiąż nierówność  $w(x) \geq 0$ .
32. (R) Dla jakich wartości parametru  $m$  wielomian  $w(x) = x^3 \log^2 m - 3x^2 \log m - 6x - 2 \log m$  jest podzielny przez  $(x + 1)$ .
33. (R) Wiedząc, że  $f(x) = x^5 + x^3$  rozwiąż nierówność  $f'(2x) + f''(x) \geq 6x$ .